¡Manos al Ensayo!

Situación Problemática:

El tubo de ensayo es uno de los materiales de laboratorio más representativos del área científica, utilizados para múltiples tareas como experimentos o pruebas y para medir volúmenes de todo tipo. En particular, las vacunas de ARN se producen en tubos de ensayo a través de reacciones bioquímicas; que actualmente se estudian para combatir la pandemia de enfermedad por coronavirus 2019 (COVID-19).

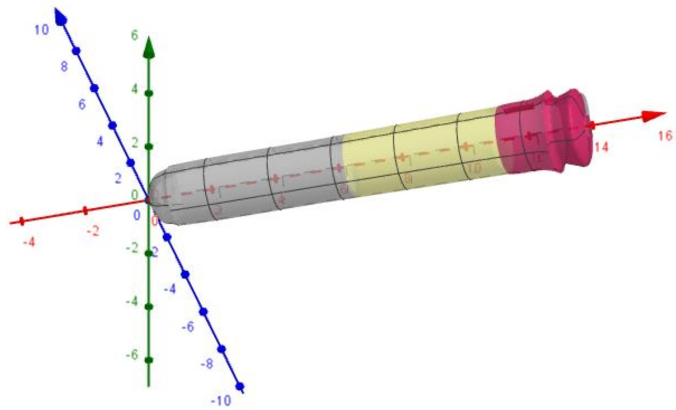
Podemos apreciar un tubo con una sola abertura, ubicada en la parte superior y una base redondeada, que se guardan en un instrumento de laboratorio llamado gradilla. Este elemento se utiliza mayormente como recipiente de líquidos y sólidos, con los cuales se realizan mezclas o se les somete a variaciones de temperatura u otras pruebas. Para evitar accidentes o complicaciones se recomienda no llenar el tubo más allá de su primer tercio y no apuntar con la boca del tubo a las personas, para así evitar proyecciones indebidas de la muestra.

1- Calcular el volumen total del tubo de ensayo.
2- ¿Cuál será el volumen para una manipulación segura de este material de laboratorio?

Resolución:

Análisis a través de software de la situación problemática

Para encontrar el volumen de llenado recomendado primero se obtiene el volumen total del tubo y para ello no se tiene en cuenta la superficie que excede al tubo correspondiente a la tapa. Luego se obtiene 1/3 del volumen total.



Primero se recorta (a través de Paint) la imagen del tubo de ensayo de la foto original, para extraer de manera particular la imagen de uno de los tubos que se va a modelizar. Luego se ubica la imagen recortada del tubo sobre el eje x y se la delimita a través de puntos. Después se va determinando la expresión polinómica que se ajuste a los puntos y la correspondiente función a trozos.

- $f(x) = 4.3\,x^3 - 7.06\,x^2 + 4.05\,x$
- $g(x) = 4.3\,x^3 - 7.06\,x^2 + 4.05\,x, \quad (0 \le x \le 0.8)$
- $h(x) = 0\,x^3 - 0.02\,x^2 + 0.08\,x + 0.87$
- $p(x) = 0\,x^3 - 0.02\,x^2 + 0.08\,x + 0.87, \quad (0.8 \le x \le 6.38)$
- $q(x) = 0.01\,x + 0.9$
- $r(x) = 0.01\,x + 0.9, \quad (6.38 \le x \le 11.2)$
- $s(x) = 0.21\,x^3 - 7.53\,x^2 + 88.79\,x - 347.85$
- $t(x) = 0.21\,x^3 - 7.53\,x^2 + 88.79\,x - 347.85, \quad (11.2 \le x \le 12.78)$
- $f_1(x) = -25.87\,x^5 + 1714.6\,x^4 - 45454.64\,x^3 + 602469.45\,x^2 - 3992395.25\,x + 10581902.67$
- $g_1(x) = -25.87\,x^5 + 1714.6\,x^4 - 45454.64\,x^3 + 602469.45\,x^2 - 3992395.25\,x + 10581902.67, \quad (12.78 \le x \le 13.82)$

Como segundo paso, se generan los sólidos de revolución correspondientes, haciendo rotar sobre el eje x cada una de las superficies planas determinadas por las funciones definida a trozo y el eje x. Para ello se utiliza el comando específico 3D superficie de revolución.

- $a = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{Si}(0.8 \le u \le 6.38, 0\,u^3 - 0.02\,u^2 + 0.08\,u + 0.87)\ \cos(v) \\ \mathrm{Si}(0.8 \le u \le 6.38, 0\,u^3 - 0.02\,u^2 + 0.08\,u + 0.87)\ \mathrm{sen}(v) \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{Si}(6.38 \le u \le 11.2, 0.01\,u + 0.9)\ \cos(v) \\ \mathrm{Si}(6.38 \le u \le 11.2, 0.01\,u + 0.9)\ \mathrm{sen}(v) \end{pmatrix}$
- $c = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{Si}(11.2 \le u \le 12.78, 0.21\,u^3 - 7.53\,u^2 + 88.79\,u - 347.85)\ \cos(v) \\ \mathrm{Si}(11.2 \le u \le 12.78, 0.21\,u^3 - 7.53\,u^2 + 88.79\,u - 347.85)\ \mathrm{sen}(v) \end{pmatrix}$
- $d = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{Si}(12.78 \le u \le 13.82, -25.87\,u^5 + 1714.6\,u^4 - 45454.64\,u^3 + 602469.45\,u^2 - 3992395.25\,u + 10581902.67)\ \cos(v) \\ \mathrm{Si}(12.78 \le u \le 13.82, -25.87\,u^5 + 1714.6\,u^4 - 45454.64\,u^3 + 602469.45\,u^2 - 3992395.25\,u + 10581902.67)\ \mathrm{sen}(v) \end{pmatrix}$
- $e = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{Si}(0 \le u \le 0.8, 4.3\,u^3 - 7.06\,u^2 + 4.05\,u)\ \cos(v) \\ \mathrm{Si}(0 \le u \le 0.8, 4.3\,u^3 - 7.06\,u^2 + 4.05\,u)\ \mathrm{sen}(v) \end{pmatrix}$

Por último, a través de la fórmula de volumen de un sólido de revolución $V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$, con a límite inferior y b límite superior se obtienen las respectivas integrales de las funciones definidas a trozos y en consecuencia sus correspondientes volúmenes. Para ello no se tiene en cuenta la última función correspondiente a la parte de la tapa que sobresale del tubo. Luego se realiza la suma de esos volúmenes parciales para obtener el volumen total.

Número **i**: π Integral(g(x)², x(C), x(F))

Número **j**: π Integral(p(x)², x(F), x(Q))

Número **k**: π Integral(r(x)², x(Q), x(R))

Número **l**: π Integral(t(x)², x(R), x(K))

i = 1.23

j = 16.08

k = 15.45

l = 6.1

Número **m**: Suma({i, j, k, l}) → **m = 38.86**

Como se recomienda no llenar el tubo más allá de su primer tercio, entonces se divide el volumen total por3, obteniendo así:

$$V = 12{,}95\ cm^3$$

Se determinó como unidad de medida el cm, teniendo en cuenta la escala utilizada en geogebra donde el tubo mide $13cm$ sin su correspondiente tapa.

Análisis analítico de la situación problemática

Si consideramos el primer sólido de revolución, correspondiente a la parte redondeada del tubo, generado al rotar sobre el eje x la superficie plana definida por la función:

$$g(x) = 4{,}3x^3 - 7{,}06x^2 + 4{,}5x; (0 \leq x \leq 0{,}8)$$

Y utilizando la fórmula para determinar el volumen de un sólido mediante integrales, se tiene:

$$V = \pi \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{4/5} \left(\frac{43}{10}x^3 - \frac{353}{50}x^2 + \frac{81}{20}x\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{4/5} \left(\frac{43}{10}x^3 - \frac{353}{50}x^2 + \frac{81}{20}x\right)\left(\frac{43}{10}x^3 - \frac{353}{50}x^2 + \frac{81}{20}x\right) dx$$

$$V = \pi \int_0^{4/5} \left(\frac{1849}{100}x^6 - \frac{15179}{500}x^5 + \frac{3483}{200}x^4 - \frac{15179}{500}x^5 + \frac{124609}{2500}x^4 - \frac{28593}{1000}x^3 + \frac{3483}{200}x^4 - \frac{28593}{1000}x^3 + \frac{6561}{400}x^2\right) dx$$

$$V = \pi \int_0^{4/5} \left(\frac{1849}{100}x^6 - \frac{15179}{250}x^5 + \frac{52921}{625}x^4 - \frac{28593}{500}x^3 + \frac{6561}{400}x^2\right) dx$$

$$V = \pi \left(\int_0^{4/5} \frac{1849}{100}x^6\,dx - \int_0^{4/5} \frac{15179}{250}x^5\,dx + \int_0^{4/5} \frac{52921}{625}x^4\,dx - \int_0^{4/5} \frac{28593}{500}x^3\,dx + \int_0^{4/5} \frac{6561}{400}x^2\,dx\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{1849}{100}\int_0^{4/5} x^6\,dx - \frac{15179}{250}\int_0^{4/5} x^5\,dx + \frac{52921}{625}\int_0^{4/5} x^4\,dx - \frac{28593}{500}\int_0^{4/5} x^3\,dx + \frac{6561}{400}\int_0^{4/5} x^2\,dx\right)$$

$$V = \pi \left(\left(\frac{1849}{100} \times \frac{x^7}{7}\right) - \left(\frac{15179}{250} \times \frac{x^6}{6}\right) + \left(\frac{52921}{625} \times \frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{28593}{500} \times \frac{x^4}{4}\right) + \left(\frac{6561}{400} \times \frac{x^3}{3}\right)\right)$$

Luego aplicando regla de Barrow:

$$\int_0^{4/5} g(x)dx = f(4/5) - f(0)$$

$$V = \pi \left(\left(\frac{1849}{100} \times \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^7}{7}\right) - \left(\frac{15179}{250} \times \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^6}{6}\right) + \left(\frac{52921}{625} \times \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^5}{5}\right) - \left(\frac{28593}{500} \times \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4}{4}\right) + \left(\frac{6561}{400} \times \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{3}\right)\right)$$

$$V = \pi(0{,}5539 - 2{,}6527 + 5{,}5491 - 5{,}8558 + 2{,}7993)$$

$$V = 1{,}2371 cm^3$$

De esta forma se obtuvo el volumen del primer sólido de revolución, en la cual se determinó como unidad de medida el cm, teniendo en cuenta la escala utilizada en geogebra donde el tubo mide $13cm$ sin su correspondiente tapa. Reiterando el proceso, en cada sólido generado al rotar sobre el eje x la superficie plana definida por su correspondiente función, se obtienen resultados parciales del volumen del tubo de ensayo. Sumando los resultados parciales se obtiene el volumen total del tubo; para lo que se debe tener en cuenta que existe una función que no corresponde al tubo sino a la tapa del tubo. Calculado 1/3 del volumen total obtendremos el volumen de llenado recomendado.