

# **PROGRAMACIÓN LINEAL**

**Índice:**

<i>1. Origen de la programación lineal</i>	<i>1</i>
<i>2. Inecuaciones lineales. Interpretación geométrica</i>	<i>2</i>
<i>3. Sistemas de inecuaciones lineales. Interpretación geométrica</i>	<i>2</i>
<i>4. ¿Qué es la programación lineal?</i>	<i>3</i>
<i>5. Planteamiento del problema en términos matemáticos</i>	<i>4</i>
<i>6. Método analítico para el cálculo de soluciones</i>	<i>7</i>
<i>7. Método gráfico para el cálculo de soluciones</i>	<i>11</i>

## **1. Orígenes de la programación lineal.**

En el mundo que vivimos, pocas son las ramas del saber en las que las **Matemáticas** no han mostrado su influencia, en particular los conceptos de máximo y mínimo han contribuido a resolver bastantes problemas en otras ciencias.

Desde tiempos muy remotos se han estudiado problemas de optimización (maximizar y minimizar), como por ejemplo en la obra denominada “Elementos”, escrita por el matemático griego Euclides, se hacía referencia a la menor y mayor recta que puede ser trazada a una circunferencia desde un punto exterior, o la forma de hallar el paralelogramo de área máxima, estando fijado su perímetro.

Durante el desarrollo del Cálculo Infinitesimal y el Cálculo de Variaciones (siglos XVII y XVIII), por matemáticos como Leibnitz, Newton o Bernoulli, también se estudiaron posteriormente problemas de optimización, utilizando funciones matemáticas.

Sin embargo, es a partir de la Revolución Industrial, cuando surgen nuevos problemas de optimización, que conlleva también la aparición de nuevas técnicas. **Leonid Vitalevich Kantarovitch** publicó el libro “Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción” en el que por primera vez se plantean problemas de programación lineal. Posteriormente, aparecerían otros problemas de optimización, como el problema de transporte o el problema de régimen alimenticio óptimo.

Paralelamente a la aparición y desarrollo de problemas de optimización, se han desarrollado técnicas de computación que han hecho posible la resolución y simplificación de algunos de estos problemas.

Una de las primeras aplicaciones de la programación lineal fue el puente aéreo de Berlín <sup>1</sup>.

En 1947, **George Bernard Dantzig** formula, en términos matemáticos precisos, (método del simplex) el enunciado al que se debe reducir todo problema de programación lineal. Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro **John von Neumann** (1903-1957), que publicó la teoría de juegos.

---

<sup>1</sup> A mediados de 1948, la U.R.S.S. bloqueó las comunicaciones terrestres en poder de los aliados, que se plantearon dos posibilidades: romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire.

Se adoptó la segunda decisión utilizando un modelo de programación lineal, organizando de forma efectiva el abastecimiento aéreo y terrestre: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones.

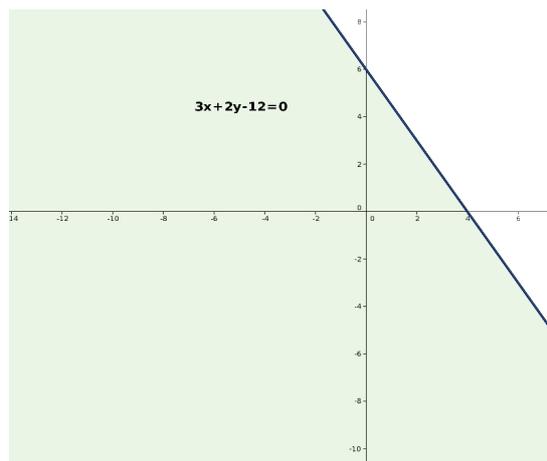
## 2. Inecuaciones lineales. Interpretación geométrica.

Una inecuación lineal es de alguna de las siguientes formas

$$ax + by + c \geq 0 \quad ax + by + c \leq 0 \quad ax + by + c > 0 \quad ax + by + c < 0$$

Además, una inecuación lineal, geométrica mente representa el conjunto de puntos de uno de los dos semiplanos en los que la recta de la ecuación  $ax + by + c = 0$  divide el plano

# Ejemplo.- Gráficamente el conjunto  $3x + 2y - 12 \leq 0$  es



## 3. Sistema de inecuaciones lineales. Interpretación geométrica.

Un sistema de inecuaciones lineales, es un conjunto de inecuaciones lineales, y geoméricamente está representado por un conjunto de puntos que cumplen todas las inecuaciones, que puede ser acotada o no

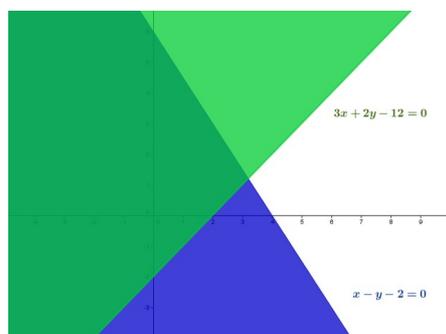
# Ejemplos.

Gráficamente el conjunto de puntos que verifica

$$3x + 2y - 12 \leq 0$$

$$x - y - 2 \leq 0$$

es el conjunto de puntos de intersección de las dos regiones (verde y azul)



que no está acotado.

Gráficamente el conjunto de puntos que verifica

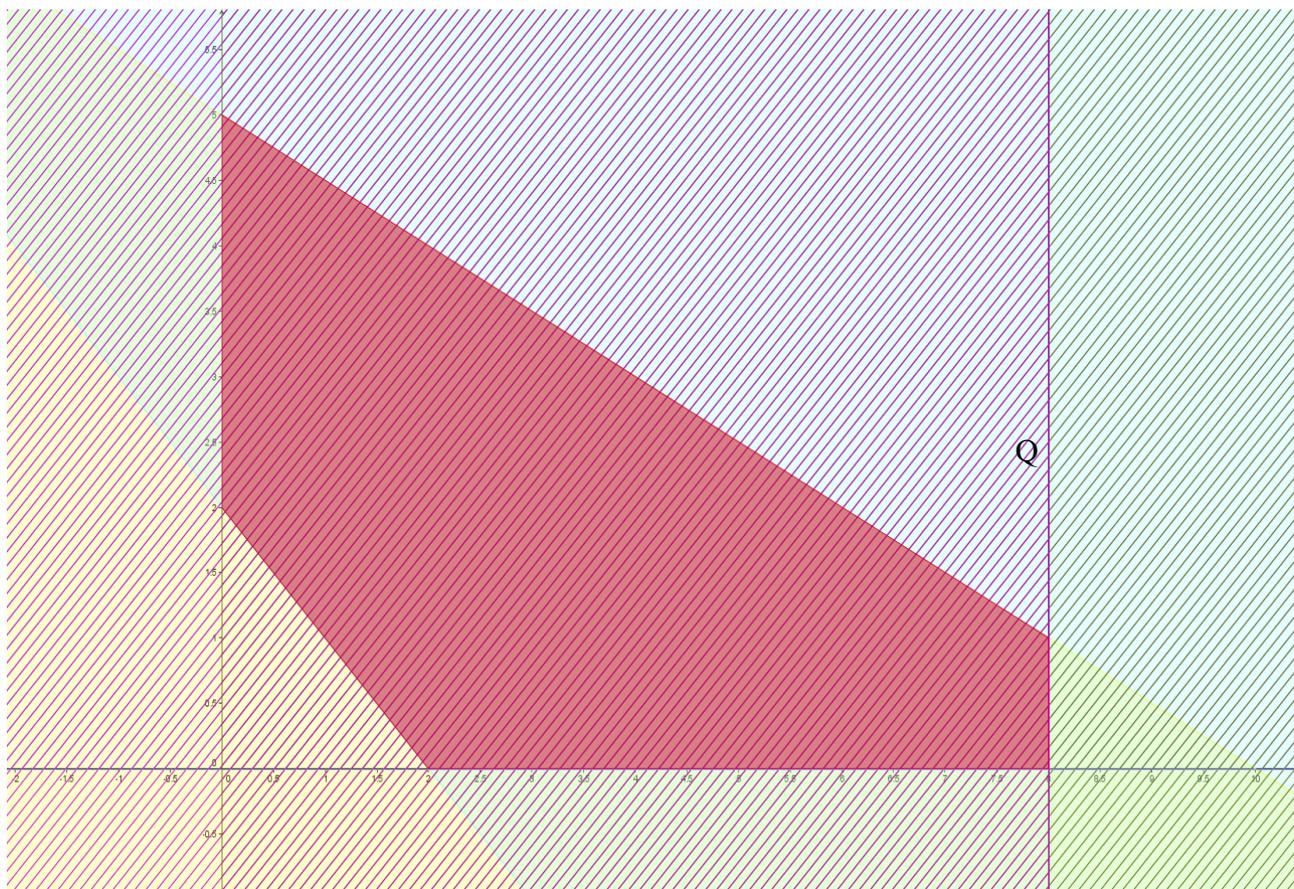
$$x + 2y \leq 10$$

$$x + y \geq 2$$

$$x \leq 8$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



es el conjunto encerrado en el pentágono irregular. Además el valor de cada uno de los vértices del recinto, se puede obtener resolviendo el sistema formado por cada par de ecuaciones de las rectas; así por ejemplo resolviendo el sistema  $\{x=8 ; x + 2y=10\}$  se obtiene el vértice del recinto  $Q(8,1)$  .

#### 4. ¿Qué es la programación lineal?

La programación lineal surgió inicialmente para dar respuesta a cuestiones de carácter logístico y militar, sin embargo es en la industria y en la economía, donde posteriormente, ha encontrado sus aplicaciones más importantes. Así, por ejemplo, la programación lineal permite resolver problemas de mezclas, nutrición, almacenaje, producción, circulación, semáforos, etc.

En este tipo de problemas, se presentan situaciones que las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, denominadas restricciones.

##### # Ejemplo 1. **Problema de máximos**

- Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg de chocolate, 1 kg de almendras y 1 kg de frutas; la de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1,5 kg de almendras y 1 kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 13 y 13,50 euros, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta?

##### # Ejemplo 2. **Problema de mínimos**

- Un grupo local posee dos emisoras de radio, una de FM y otra de AM. La emisora de FM emite diariamente 12 horas de música rock, 6 horas de música clásica y 5 horas de información general. La emisora de AM emite diariamente 5 horas de música rock, 8 horas de música clásica y 10 horas de información general. Cada día que emite la emisora de FM le cuesta al grupo 5000 euros, y cada día que emite la emisora de AM le cuesta 4000 euros. Sabiendo que tienen enlatado para emitir 120 horas de música rock, 180 horas de música clásica y 100 horas de información general, ¿cuántos días deberá emitir con ese material cada una de las dos emisoras para que el coste sea mínimo, teniendo en cuenta que entre las dos emisoras han de emitir al menos una semana?.

## 5. Planteamiento del problema en términos matemáticos.

Vamos a ver como se plantearía el problema de programación lineal (*maximización y minimización*) utilizando los ejemplos del apartado anterior.

### # Ejemplo 1. Problema de máximos

Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg de chocolate, 1 kg de almendras y 1 kg de frutas; la de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1,5 kg de almendras y 1 kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 13 y 13,50 euros, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta?

Para plantear este problema, seguimos los siguientes pasos:

a) Simplificamos el enunciado, mediante una tabla

	Caja tipo A (kg.)	Caja tipo B (kg.)	Disponibles (Kg.)
Chocolate	3	2	500
Almendras	1	1,5	100
Frutas	1	1	85
Precio en euros	13	13,5	

b) Expresamos con ecuaciones e inecuaciones lineales la información descrita.

Si designamos por  $x$  el número de cajas de tipo A y por  $y$  al número de cajas del tipo B que se han de fabricar. La función

$$z = 13x + 13,50y$$

representa la cantidad de euros obtenidos por la venta de las cajas, y por tanto es la función que debemos maximizar.

Las restricciones del problema vienen dadas por las siguientes inecuaciones:

$$3x + 2y \leq 500$$

$$x + 1,5y \leq 100$$

$$x + y \leq 85$$

Y por supuesto, con la condición

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

**# Ejemplo 2. Problema de mínimos**

Un grupo local posee dos emisoras de radio, una de FM y otra de AM. La emisora de FM emite diariamente 12 horas de música rock, 6 horas de música clásica y 5 horas de información general. La emisora de AM emite diariamente 5 horas de música rock, 8 horas de música clásica y 10 horas de información general. Cada día que emite la emisora de FM le cuesta al grupo 5000 euros, y cada día que emite la emisora de AM le cuesta 4000 euros. Sabiendo que tienen enlatado para emitir 120 horas de música rock, 180 horas de música clásica y 100 horas de información general, ¿cuántos días deberá emitir con ese material cada una de las dos emisoras para que el coste sea mínimo, teniendo en cuenta que entre las dos emisoras han de emitir al menos una semana?

a) Simplificamos el enunciado, mediante una tabla

	Emisora FM (horas)	AM (horas)	Disponibles (horas)
Música Rock	12	5	120
Música Clásica	6	8	180
Información general	5	10	100
Coste en euros	5000	4000	

b) Expresamos con ecuaciones e inecuaciones lineales la información descrita.

Si designamos por  $x$  el número de días que emite la emisora de FM y por  $y$  al número de días que emite la emisora de AM. La función

$$z = 5000x + 4000y$$

representa el coste en euros de la emisión, y por tanto es la función que debemos minimizar.

Las restricciones del problema vienen dadas por las siguientes inecuaciones:

$$12x + 5y \leq 120$$

$$6x + 8y \leq 180$$

$$5x + 10y \leq 100$$

$$x + y \geq 7$$

Y por supuesto, con la condición

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

## 6. Método analítico para el cálculo de soluciones.

Vamos a ver como se solucionaría el problema de programación lineal (*maximización y minimización*) utilizando los ejemplos del apartado anterior.

### # Ejemplo 1. Problema de máximos

Se trata

$$\text{maximizar } z = 13x + 13,50y$$

$$\text{sujeto a } 3x + 2y \leq 500$$

$$x + 1,5y \leq 100$$

$$x + y \leq 85$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Y dado (se puede demostrar) que  $z$  alcanza sus valores máximo en los vértices del recinto de restricciones

Que son soluciones de los sistemas de ecuaciones

Sistema 1

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Sistema 2

$$x + 1,5y = 100$$

$$x = 0$$

Sistema 3

$$x + y = 85$$

$$y = 0$$

Sistema 4

$$x + 1,5y = 100$$

$$x + y = 85$$

Cuyos puntos son

$$O(0,0), P(85,0), Q(55,30), R\left(0, \frac{100}{1,5}\right)$$

Y evaluando para dichos valores la función  $z$ , obtenemos:

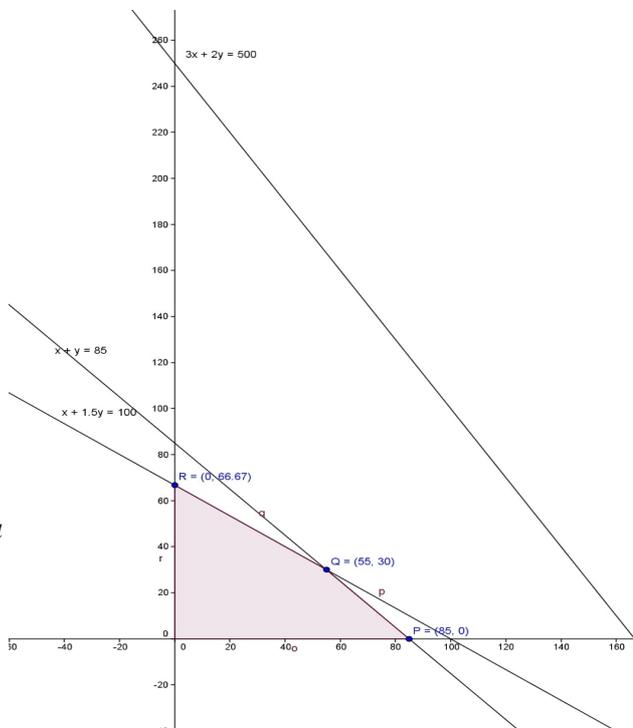
$$z(O) = 0x + 0y = 0 \text{ €}$$

$$z(P) = 13 \cdot 85 + 13,50 \cdot 0 = 1105 \text{ €}$$

$$z(Q) = 13 \cdot 55 + 13,50 \cdot 30 = 1120 \text{ €}$$

$$z(R) = 13 \cdot 0 + 13,50 \cdot \frac{100}{1,5} = 900 \text{ €}$$

Por tanto la función  $z$ , alcanza el valor máximo en el punto  $Q(55,30)$ . Luego, el fabricante deberá producir 55 cajas del tipo A y 30 del tipo B.



**Ejemplo 2. Problema de mínimos**

Se trata

minimizar  $z = 5000x + 4000y$

sujeto a  $12x + 5y \leq 120$

$6x + 8y \leq 180$

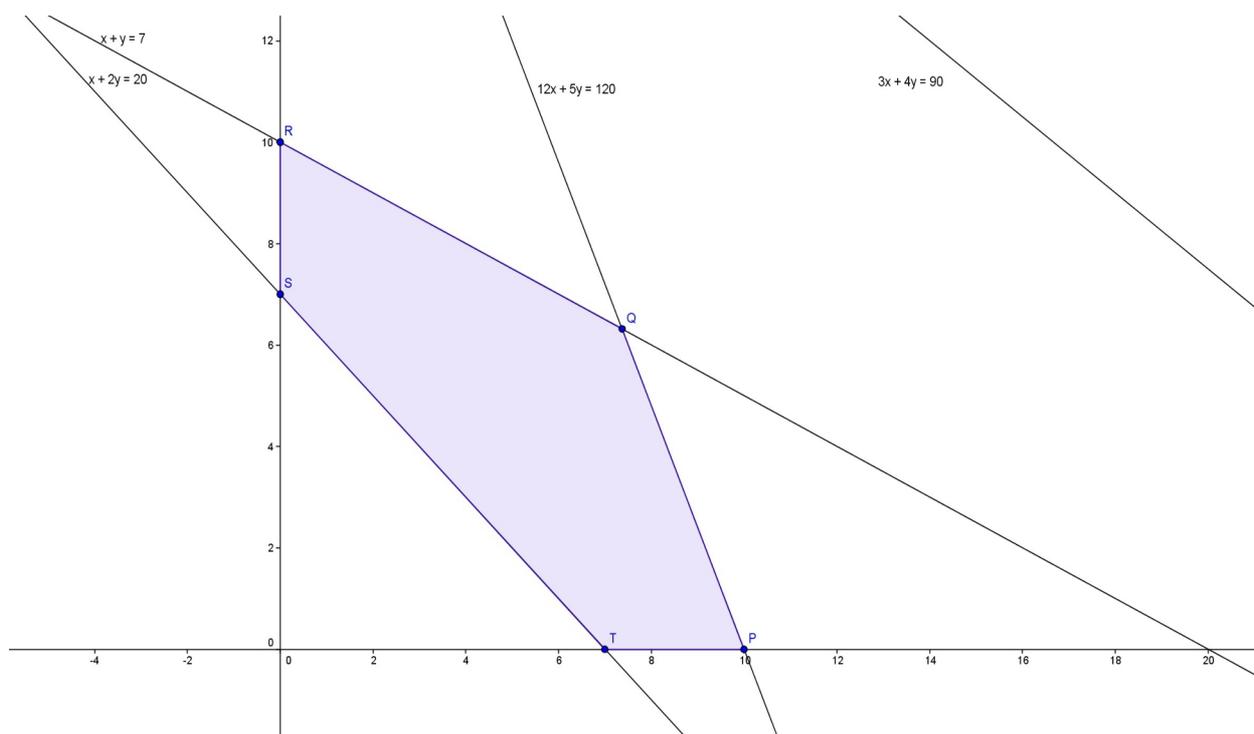
$5x + 10y \leq 100$

$x + y \geq 7$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Y dado (se puede demostrar) que  $z$  alcanza sus valores máximo y mínimo en los vértices del recinto de restricciones



Que son soluciones de los sistemas de ecuaciones

Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3	Sistema 4	Sistema 5
$12x + 5y = 120$	$12x + 5y = 120$	$x + y = 7$	$5x + 10y = 100$	$5x + 10y = 100$
$y = 0$	$x + y = 7$	$x = 0$	$y = 0$	$x = 0$

Cuyos puntos son

$P(10,0), Q(7,32), R(0,10), S(0,7), T(7,0)$

Y evaluando para dichos valores la función  $z$ , obtenemos:

$$z(P) = 5000 \cdot 10 + 4000 \cdot 0 = 50.000 \text{ €}$$

$$z(Q) = 5000 \cdot 7,37 + 4000 \cdot 6,32 = 62.130 \text{ €}$$

$$z(R) = 5000 \cdot 0 + 4000 \cdot 10 = 40.000 \text{ €}$$

$$z(S) = 5000 \cdot 0 + 4000 \cdot 7 = 28.000 \text{ €}$$

$$z(T) = 5000 \cdot 7 + 4000 \cdot 0 = 35.000 \text{ €}$$

Por tanto la función  $z$ , alcanza el valor mínimo en el punto  $S(0,7)$ . Luego, el grupo debe de emplear el material enlatado que posee durante 7 días en la emisora AM y ninguna en la emisora FM.

## **7. Método gráfico para el cálculo de soluciones.**

Para calcular gráficamente la solución de un problema de programación lineal de dos variables es conveniente seguir el siguiente proceso:

1. Se dibuja el recinto limitado por las restricciones del problema.
2. Se representa el vector director de la recta que viene dada por la ecuación que hay que maximizar o minimizar.
3. Se trazan rectas paralelas a este vector que pasen por cada uno de los vértices del recinto, y se observa en que vértice la función  $z$  se hace máxima (o mínima), sin mas que tener en cuenta cual de las rectas tiene mayor (o menor) ordenada en el origen.

**# Ejemplo 1. Problema de máximos.**

Si queremos resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\text{maximizar } z = 13x + 13,50y$$

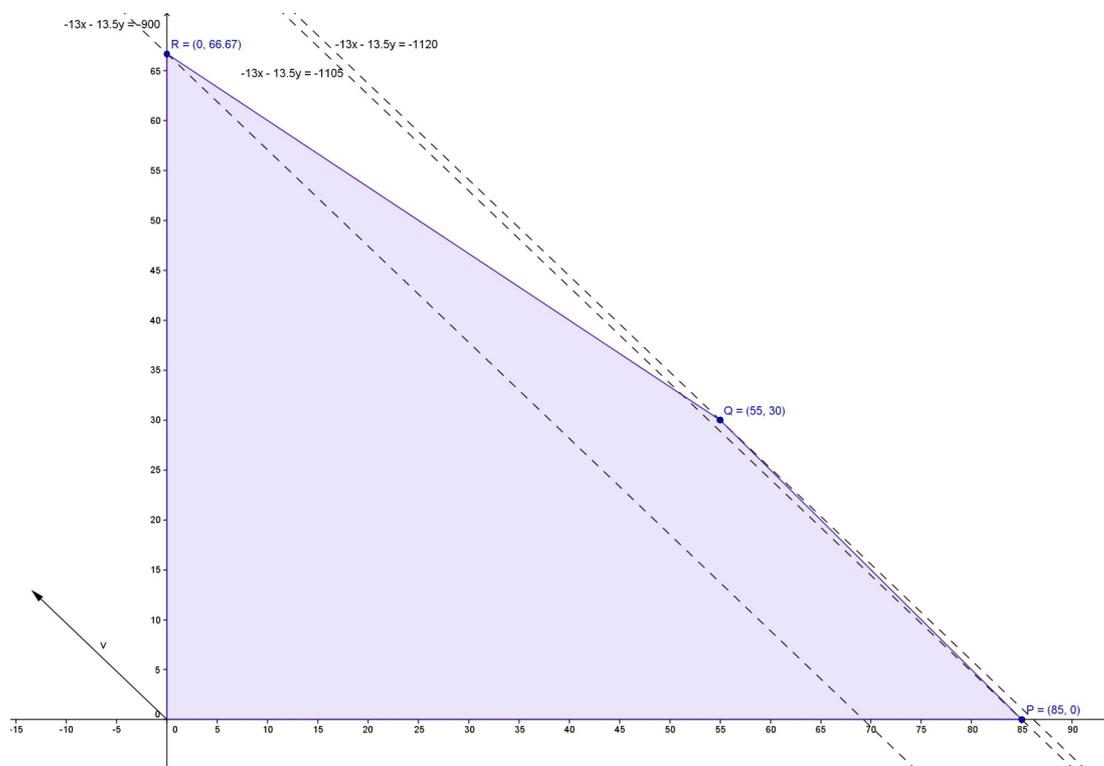
$$\text{sujeto } 3x + 2y \leq 500$$

$$x + y \leq 85$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

1.- Representamos el recinto limitado por las inecuaciones:



2.- Representamos el vector director de la función  $z$  a maximizar:

$$\vec{v} = (-13, 50, 13)$$

3.- Trazamos rectas paralelas al vector  $v$  que pasen por los vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

Se observa gráficamente que la función  $z$  alcanza su máximo en el vértice

$Q(55, 30)$ , ya que la recta que pasa por él tiene mayor ordenada en el origen que las demás.

Luego, para obtener unos ingresos máximos, el fabricante deberá producir 55 cajas del tipo A y 30 del tipo B.

# Ejemplo 2. Problema de mínimos.

Si queremos resolver el siguiente problema de programación lineal

minimizar  $z = 5000x + 4000y$

sujeto  $12x + 5y \leq 120$

$$6x + 8y \leq 180$$

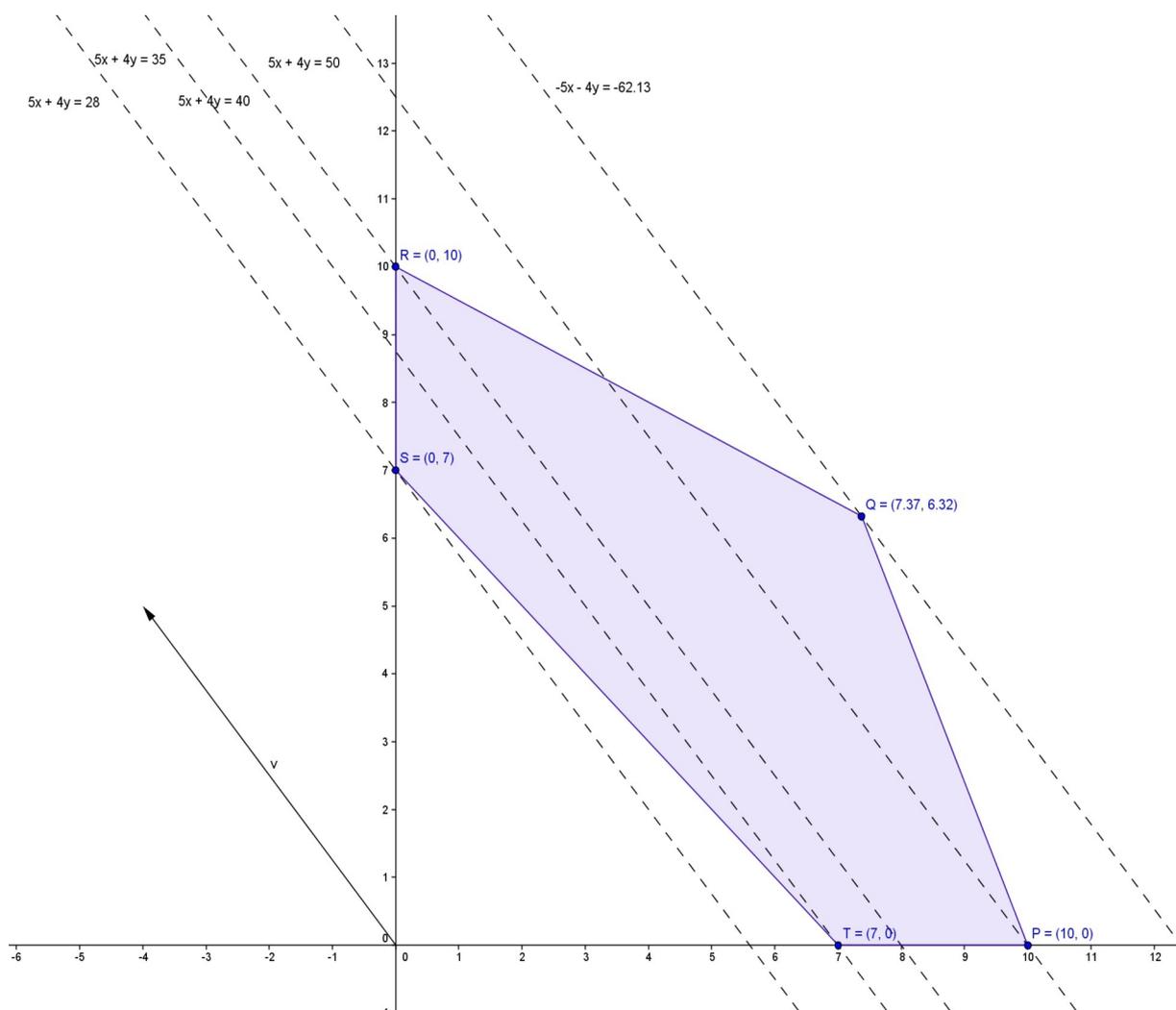
$$5x + 10y \leq 100$$

$$x + y \geq 7$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

1.- Representamos el recinto limitado por las inecuaciones:



2.- Representamos el vector director de la función  $z$  a maximizar:

$$\vec{v} = (-4000, 5000) \quad \text{o bien} \quad \vec{v} = (-4, 5)$$

3.- Trazamos rectas paralelas al vector  $v$  que pasen por los vértices  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  y  $T$ . Se observa gráficamente que la función  $z$  alcanza su mínimo en el vértice  $S(0,7)$ , ya que la recta que pasa por él tiene menor ordenada en el origen que las demás.

**Luego, el grupo de emisoras deberá emplear el material enlatado que posee durante 7 días en la emisora de AM, y ningún día en la emisora de FM para hacer el mínimo coste.**