2 Teorema di Talete

TEOREMA 2.1 (di Talete)**.** *Una retta parallela ad un lato di un triangolo che intersechi gli altri due lati in punti interni ad essi, li divide in parti proporzionali.*

Ipotesi:

1. ABC triangolo
2. D punto interno ad AB, E punto interno ad AC, tali che $DE \parallel CD$

Tesi: $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$

Dimostrazione. 1. Sia ABC un triangolo ed r una retta parallela a CD che interseca, rispettivamente, i lati AB e AC in D ed E

2. Tracciamo i segmenti DC e BE
3. Consideriamo i triangoli BDE e CDE
4. I due triangoli sono equivalenti. Siano infatti R ed S le proiezioni su r, rispettivamente, di B e C. Quindi $BR \cong CS$ perché distanze fra rette parallele. Ma questi due segmenti sono altezze relative alla base DE dei triangoli BDE e CDE che risultano avere base in comune ed altezze congruenti e sono, quindi, equivalenti, cioè

$$S(BDE) = S(CDE) \tag{1}$$

5. Sia ora T la proiezione di E su AB [1] e sia U la proiezione di D su AC[2]. Il segmento ET è altezza del triangolo ADE rispetto alla base AD e altezza del triangolo BDE rispetto alla base BD, quindi:

$$S(ADE) = \frac{1}{2}AD \cdot ET \ ; \ S(BDE) = \frac{1}{2}BD \cdot ET \tag{2}$$

A sua volta, il segmento DU è altezza del triangolo ADE rispetto alla base AE e altezza del triangolo CDE rispetto alla base CE, quindi

$$S(ADE) = \frac{1}{2}AE \cdot DU \ ; \ S(CDE) = \frac{1}{2}CE \cdot DU \tag{3}$$

Ora, considerando la 1, si può considerare valida la proporzione[3]:

$$\frac{S(ADE)}{S(BDE)} = \frac{S(ADE)}{S(CDE)} \tag{4}$$

[1] o sul suo prolungamento, nel caso in cui il triangolo fosse ottusangolo
[2] vedi sopra
[3] infatti sono rapporti fra quantità uguali

Introducendo ora nella 4 le espressioni contenute nelle 2 e 3, si ha:

$$\frac{\frac{1}{2}AD \cdot ET}{\frac{1}{2}BD \cdot ET} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot DU}{\frac{1}{2}CE \cdot DU} \tag{5}$$

Semplificando, si ottiene la tesi

□