Teoría – Tema 8

Teoría - 2a - Límites - Propiedades

Existencia única de límite

Si los límites laterales de una función $f(x)$ en un punto $x=x_0$ son diferentes, la función $f(x)$ no tiene límite en $x=x_0$ (**unicidad del límite**).

Una función $f(x)$ posee límite en $x=x_0$ si y solo si sus límites laterales son iguales. Y este límite es único.

$\lim_{x \to x_0} f(x)=L$ si y solo si $\lim_{x \to x_0^-} f(x)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=L$

Si los límites laterales coinciden en $(+\infty)$, se dice que el límite de la función es $(+\infty)$. Y si los límites laterales coinciden en $(-\infty)$, se dice que el límite de la función es $(-\infty)$.

No debemos confundir esto con el hecho de que el límite no exista. Es decir, una cosa es que el límite valga $(+\infty)$ ó $(-\infty)$, y otra cosa distinta es que el límite no exista.

Un límite no existe cuando sus límites laterales no coinciden (ya sean valores finitos o infinitos), **o cuando no esté definido su valor.** Por ejemplo, si estudiamos una raíz cuadrada o un logaritmo en valores negativos:

$\lim_{x \to -1} \sqrt{x} \to \nexists$, $\lim_{x \to -1} \ln x \to \nexists$

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0$, existe un entorno de x_0 en el que los valores que toma la función tiene el mismo signo que L . Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0 \implies \exists \delta > 0 / signo(f(x_0 - \delta)) = signo(f(x_0 + \delta)) = signo(L)$$

Para las siguientes propiedades vamos a considerar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con límites finitos en un punto x_0 .

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M,\ M \in \mathbb{R}$$

El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada función. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M$$

Igualmente, el límite de la diferencia de funciones es la diferencia de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L - M$$

El límite del producto de funciones es el producto de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$$

El límite de una constante multiplicada por una función es igual a la constante por el límite de la función:

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = k \cdot L,\ k \in \mathbb{R}$$

El límite de un cocientes de funciones es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}, \; M \neq 0$$

El límite de una función elevada a otra función, es el límite de la base elevado al límite del exponente, siempre y cuando el límite de la base sea positivo.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim_{x \to x_0} g(x)} = L^M, \; L > 0$$

Operaciones básicas con factores infinitos

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$k\pm\infty=\pm\infty,\ k\in\mathbb{R}$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

$k\cdot(\pm\infty)=\pm\infty,\ k\in\mathbb{R}\ \ y\ \ k>0$

$k\cdot(\pm\infty)=\mp\infty,\ k\in\mathbb{R}\ \ y\ \ k<0$

$\frac{k}{\infty}=0,\ k\in\mathbb{R}$

$\frac{k}{0}=\infty(indeterminación: ver\ límites\ laterales)$