Teoría – Tema 9

Teoría - 1 - pasar de dos a tres dimensiones

Coordenadas de un punto y de un vector

Un punto en dos dimensiones posee dos componentes: $A(x_0, y_0)$.

¿En tres dimensiones? Muy sencillo, añadimos una tercera componente: $A(x_0, y_0, z_0)$.

Un vector en dos dimensiones tiene dos componentes: $\vec{u}=(u_x, u_y)$.

Y en tres dimensiones tendremos tres componentes: $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$.

Ecuaciones de la recta en dos dimensiones que nos servirán para comprender las ecuaciones en tres dimensiones

Sea r una recta de la que conocemos un vector director $\vec{AB}=(u_x, u_y)$. Sea $A(x_0, y_0)$ un punto de la recta r .

Ecuación vectorial de la recta en dos y en tres dimensiones

$r:(x, y)=(x_0, y_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y)$

(x, y) → Punto arbitrario de la recta.

(x_0, y_0) → Coordenadas de un punto concreto perteneciente a la recta.

λ → Parámetro perteneciente a los números reales.

(u_x, u_y) → Componentes de uno de los vectores directores de la recta.

¡Ojo! Cuando pasemos a tres dimensiones solo tendremos que añadir la tercera componente al punto y al vector. Es decir:

$r:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$

Y esta expresión será la ecuación vectorial de la recta en tres dimensiones. Así de sencillo.

Ecuación paramétrica de la recta en dos y en tres dimensiones

Si trabajamos por componentes separadas en la ecuación vectorial, obtenemos la ecuación paramétrica.

Pasamos de la ecuación vectorial $(x, y)=(x_0, y_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y)$ a la ecuación paramétrica igualando componentes:

$$r:\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \end{Bmatrix}$$

¿Qué haremos en tres dimensiones? Añadir una tercera ecuación para la tercera componente.

$$r:\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{Bmatrix}$$

Ecuación cartesiana o continua de la recta en dos y tres dimensiones

Si despejamos el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualamos, obtenemos la ecuación continua.

Pasamos de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana o continua despejando el parámetro λ e igualando.

$r:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$ → pasamos a tres dimensiones → $r:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$

Ecuación general o implícita de la recta en dos dimensiones y ecuación general del plano en tres dimensiones

Operando sobre la ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \quad \rightarrow \quad u_y\cdot(x-x_0)=u_x\cdot(y-y_0) \quad \rightarrow \quad u_y\cdot x-u_y\cdot x_0=u_x\cdot y-u_x\cdot y_0$$

Reordenamos términos → $u_y\cdot x-u_x\cdot y+u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=0$

Llamando → $u_y=A$, $-u_x=B$, $u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=C$

Nos queda → $A\cdot x+B\cdot y+C=0$

Las variables x , y de la recta se relacionan a través de una ecuación lineal igualada a cero.

$$r: A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

¡Ojo! En tres dimensiones la ecuación general no es una única ecuación, sino un sistema. Como estudiaremos en el tema más adelante, sí aparecerá una ecuación general del plano en tres dimensiones que se “parece mucho” a la ecuación general de la recta en dos dimensiones:

$$\Pi: A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$$

Ecuación segmentaria o canónica de la recta en dos dimensiones y ecuación canónica del plano en tres dimensiones

El punto de corte de la recta con el eje horizontal lo vamos a denotar como $(a,0)$. El punto de corte con el eje vertical como $(0,b)$. Con estos puntos podemos obtener la ecuación canónica de la recta.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

a → Corte de la recta con eje horizontal (abscisa en el origen)

b → Corte de la recta con eje vertical (ordenada en el origen)

Nuevamente, en tres dimensiones, aparece una ecuación canónica del plano en tres dimensiones que recuerda a la ecuación canónica de la recta en dos dimensiones.

$$\Pi:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Donde $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ son los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas del espacio tridimensional.

Como digo, estas ecuaciones en tres dimensiones las estudiaremos con mucho detalle en próximos capítulos.

Ejemplo 1 resuelto

Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, cartesiana, general y canónica de la recta que pasa por los puntos $A(3,1)$, $B(7,-2)$.

En primer lugar obtenemos un vector director de la recta: $\vec{AB}=(7-3,-2-1)=(4,-3)$

Ecuación vectorial → $r:(x,y)=(3,1)+\lambda\cdot(4,-3)$

Ecuación paramétrica → $r:\left\{\begin{matrix} x=3+4\lambda \\ y=1-3\lambda \end{matrix}\right\}$

Ecuación cartesiana → $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-3}$

Ecuación general → $-3(x-3)=4(y-1) \rightarrow r:3x+4y-13=0$

Ecuación canónica → $3x+4y-13=0 \rightarrow 3x+4y=13 \rightarrow r:\dfrac{x}{\frac{13}{3}}+\dfrac{y}{\frac{13}{4}}=1$

Dividir componentes de las ecuaciones generales de dos rectas en dos dimensiones para estudiar su posición relativa

Sean dos rectas paralelas en su forma general, tendremos:

$$recta\quad r \quad \rightarrow \quad r: A_r x + B_r y + C_r = 0$$
$$recta\quad s \quad \rightarrow \quad s: A_s x + B_s y + C_s = 0$$

Podemos comprobar fácilmente la posición relativa de ambas rectas estudiando la proporción de las componentes de las ecuaciones generales.

Si $\frac{A_r}{A_s} = \frac{B_r}{B_s} = \frac{C_r}{C_s}$ → rectas coincidentes

Si $\frac{A_r}{A_s} = \frac{B_r}{B_s} \neq \frac{C_r}{C_s}$ → rectas paralelas

Si $\frac{A_r}{A_s} \neq \frac{B_r}{B_s}$ → rectas secantes

Cuando estemos en tres dimensiones podremos realizar un razonamiento análogo con las ecuaciones generales del plano. Por ahora, valga el siguiente resumen de casos.

$$\Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ → planos coincidentes

Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ → planos paralelos

Si $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ → planos secantes en una recta

Producto escalar de vectores en dos y tres dimensiones. Ángulo formado por dos vectores

El concepto de "producto escalar de dos vectores" indica que debemos multiplicar ambos vectores y que el resultado es un número (un escalar).

Se llama producto escalar de dos vectores no nulos, al número real resultante de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$ → **Producto Escalar en función del coseno**

De esta definición se entiende, fácilmente, tres casos particulares muy prácticos en determinados problemas:

- $\vec{u}\|\vec{v}$ paralelos → $\alpha=0^{o}$ → $\cos(0^{o})=1$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ antiparalelos (opuestos) → $\alpha=180^{o}$ → $\cos(180^{o})=-1$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- $\vec{u}\perp\vec{v}$ perpendiculares → $\alpha=0^{o}$ → $\cos(90^{o})=0$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

El producto escalar también puede expresarse como el número real resultante de sumar el producto de las respectivas coordenadas de los vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$ → **Producto escalar en dos dimensiones (2D)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$ → **Producto escalar en tres dimensiones (3D)**

Igualando las dos expresiones del producto escalar, podemos obtener un resultado del ángulo que forman dos vectores en el plano.

$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$ → **Coseno del ángulo formado por dos vectores en 2D**

$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$ → **Coseno del ángulo formado por dos vectores en 3D**