Teoría – Tema 9

Teoría - 3 - ecuaciones de la recta - parte 2 de 2

Ecuación general o implícita de la recta

De la ecuación cartesiana podemos hacer parejas de igualdades que representan a la recta.

$$r:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \quad \rightarrow \quad r:\left\{\begin{matrix}\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}\\ \dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{z-z_0}{u_z}\end{matrix}\right\} \quad \text{o bien} \quad r:\left\{\begin{matrix}\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}\\ \dfrac{y-y_0}{u_y}=\dfrac{z-z_0}{u_z}\end{matrix}\right\}$$

Vamos a tomar, por ejemplo, la pareja de ecuaciones cartesianas siguiente:

$$r:\left\{\begin{matrix}\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}\\ \dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{z-z_0}{u_z}\end{matrix}\right\}$$

Si quitamos denominadores en cada igualdad:

$$r:\left\{\begin{matrix}u_y(x-x_0)=u_x(y-y_0)\\ u_z(x-x_0)=u_x(z-z_0)\end{matrix}\right\}$$

Llevamos todos los factores al miembro de la izquierda:

$$r:\left\{\begin{matrix}u_y\cdot x-u_x\cdot y-u_y\cdot x_0+u_x\cdot y_0=0\\ u_z\cdot x-u_x\cdot z-u_z\cdot x_0+u_x\cdot z_0=0\end{matrix}\right\}$$

Y realizamos el siguiente cambio de notación:

$$u_y=A \quad , \quad u_z=A' \quad , \quad -u_x=B \quad , \quad -u_y\cdot x_0+u_x\cdot y_0=D \quad , \quad -u_y\cdot x_0+u_x\cdot y_0=D'$$

Quedando lo que se conoce como ecuación general o implícita de la recta:

Ecuación general o implícita de la recta

$$r:\left\{\begin{matrix}A\cdot x+B\cdot y+D=0\\ A'\cdot x+B\cdot z+D'=0\end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \text{Dos ecuaciones con tres incógnitas}$$

Igualmente, podemos tener ecuaciones generales o implícitas que contengan a las tres incógnitas x,y,z .

Ecuación general o implícita de la recta

$$r:\begin{Bmatrix} A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \\ A'\cdot x+B'\cdot y+C'\cdot z+D'=0 \end{Bmatrix}$$ → Dos ecuaciones con tres incógnitas

¿Podemos pasar de una ecuación general a una ecuación paramétrica?

Sí. Resolviendo el Sistema Compatible Indeterminado de un parámetro libre que forma la ecuación general.

Ejemplo 1 resuelto

Dada la ecuación implícita $r:\begin{Bmatrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{Bmatrix}$ **obtener su correspondiente ecuación paramétrica.**

La forma de proceder es muy sencilla: a una de las variables la consideramos igual al parámetro λ .

Por ejemplo:

$$z=\lambda \quad \rightarrow \quad r:\begin{Bmatrix} x+y=3+2\lambda \\ x-y=5-4\lambda \end{Bmatrix}$$

Y resolvemos el sistema obtenido (es decir, obtenemos el valor de x e y en función del parámetro λ).

$$r:\begin{Bmatrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$$

¿Cómo pasar de la ecuación paramétrica a la ecuación general?

Eliminando el parámetro λ del sistema de ecuaciones que forman las tres ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 2 resuelto

Dada la ecuación paramétrica $r:\begin{Bmatrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$ **obtener la ecuación general o implícita de la recta.**

Necesitamos dos ecuaciones donde no aparezca el parámetro λ .

Si sumamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica:

$x+y=3+2\lambda$ → como $z=\lambda$ → $x+y-2z=3$

Si restamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica:

$x-y=5-4\lambda$ → como $z=\lambda$ → $x-y+4z=5$

Por lo tanto:

$r:\begin{Bmatrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{Bmatrix}$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

¿Podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la tercera, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí, y habría quedado:

$$r:\left\{\begin{matrix} x+z=4 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

¿Y podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la segunda, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí, y habría quedado:

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

Todas son perfectamente válidas. Lo fundamental es tener siempre dos ecuaciones con las tres incógnitas x, y, z en su conjunto.

Con este ejemplo podemos intuir por qué son tan difíciles de corregir, para un profesor, los problemas de geometría en tres dimensiones: hay casi “infinitas” formas distintas de expresar los resultados. Por eso **es fundamental explicar todos los pasos. Esto facilita la corrección y será un incentivo para que nos puntúen el ejercicio lo mejor posible.**