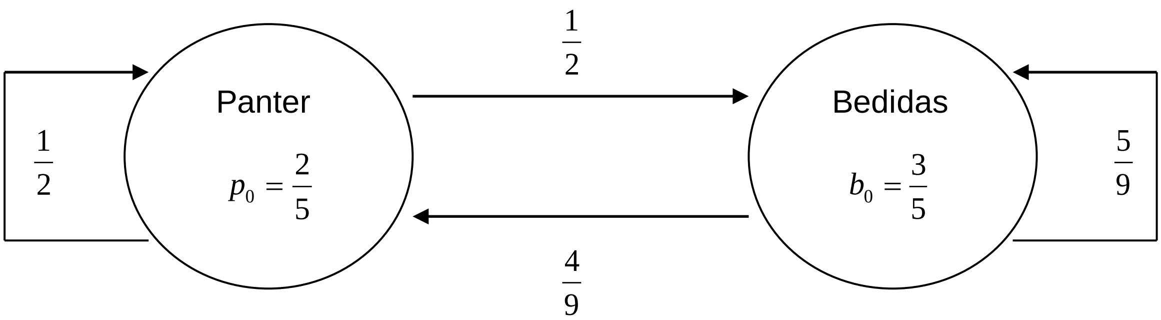
Kontrollaufgaben zur Planarbeit Stochastische Matrizen

Kontrollaufgabe 1:

Berechnen Sie ausgehend von der Verteilung Panter $p_1 = \frac{13}{35}$ und Bedidas $b_1 = \frac{22}{35}$ die Verteilungen p_2 und b_2 für die folgende Saison. Überzeugen Sie sich davon, dass auch für p_2 und b_2 gilt: $p_2 + b_2 = 1$. Zeige, dass allgemein $p_n + b_n = 1$ gilt.

Kontrollaufgabe 2

Sowohl Panter als auch Bedidas wollen aus der „Stagnation“ bei den Marktanteilen heraus. Sie ändern beide ihre Markstrategie (Erweiterung der Produktpalette, Modernisierung der Werbung, Prominente Sportler als Werbeträger, …). Die Auswirkung auf das Wechselverhalten der Käufer sei durch das folgende Diagramm gegeben.



Gehen Sie von der im Diagramm ersichtlichen Anfangsverteilung aus und berechnen Sie
(a) die Verteilung der Markanteile der kommenden Saison (p_1 und b_1),
(b) die langfristigen Marktanteile (p und b),
die sich aus dem neuen Wechselverhalten der Käufer ergibt.

Kontrollaufgabe 3

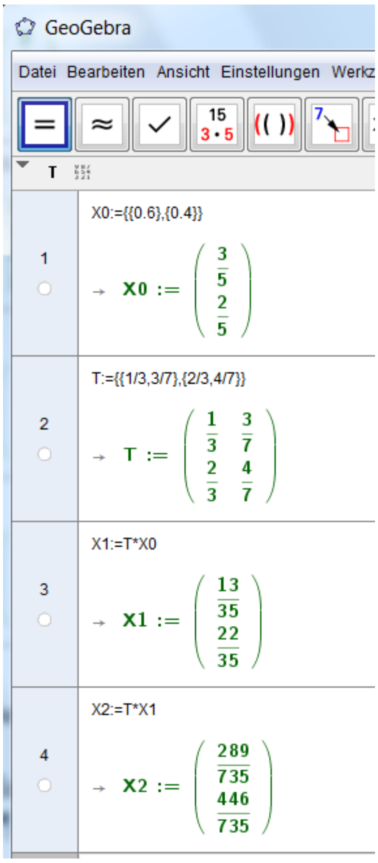
Berechnen Sie ausgehend von $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ die Verteilungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$, sukzessive mit Hilfe der Gleichungen $\vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_2$ und $\vec{x}_4 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_3$.

Hinweise für die Verwendung des GTR:

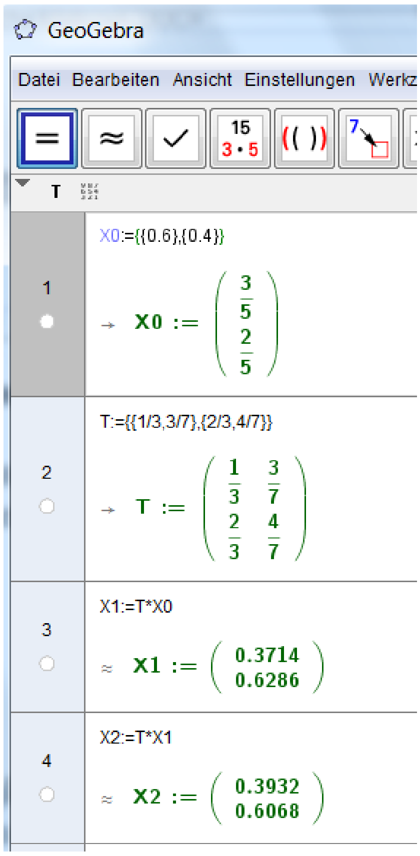
- Geben Sie die Matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ in die Matrixvariable [A] ein (MATRIX/EDIT, 2x2);
- Geben Sie den Vektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ in die Matrixvariable [B] ein (MATRIX/EDIT, 2x1);
- Bilden Sie das Produkt [A]* [B] und notieren Sie das Ergebnis
  Aufrufen von [A] → MATRIX/NAMES [A]
  Aufrufen von [B] → MATRIX/NAMES [B]
- Verfahren Sie für die Berechnung der weiteren Verteilungsvektoren genauso.

Hinweise für die Verwendung von GeoGebra

Wählen Sie das GeoGebra-Tool CAS

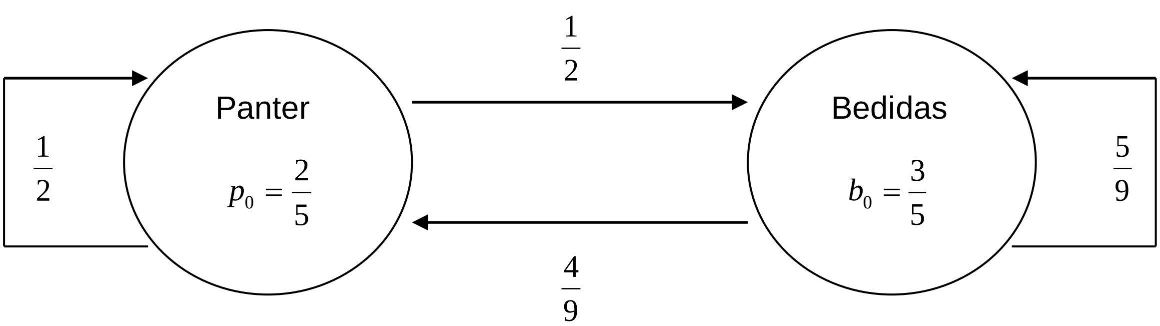


oder



Kontrollaufgabe 4

Die Marktanteile und das Wechselverhalten der Käufer sei wie in Kontrollaufgabe 2 gegeben durch das Diagramm:



(a) Geben Sie die Übergangsmatrix $\mathbf{T}$ und den Verteilungsvektor $\vec{x}_0$ an. Berechnen Sie den Verteilungsvektor $\vec{x}_1$.

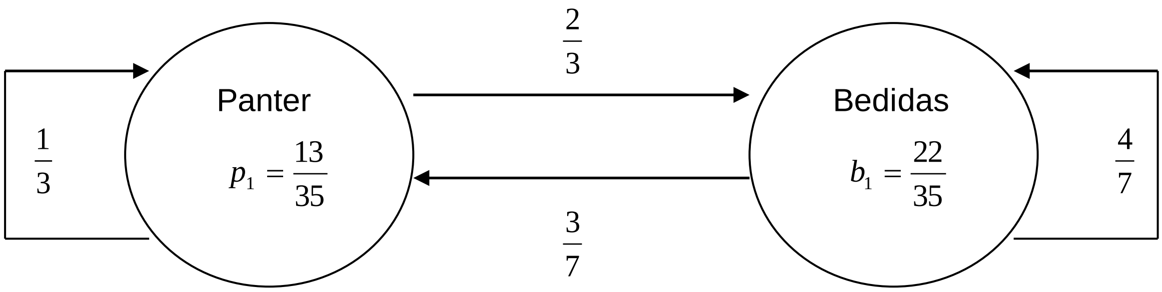
(b) Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{T}^3$ und $\mathbf{T}^6$ und damit die Verteilungsvektoren $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_6$

(c) Berechnen Sie den Stabilitätsvektor aus der Grenzwertgleichung $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ und aus der Bedingung $x_1 + x_2 = 1$.

Lösungen der Kontrollaufgaben

Lösung der Kontrollaufgabe 1

Diagramm zum Käuferverhalten



Verteilung in der zweiten Saison

Panter: $p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{3}{7} b_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{35} + \frac{3}{7} \cdot \frac{22}{35} = \frac{289}{735} \approx 0{,}3932$

Bedidas: $b_2 = \frac{2}{3} p_1 + \frac{4}{7} b_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{35} + \frac{4}{7} \cdot \frac{22}{35} = \frac{446}{735} \approx 0{,}6068$

Im neuen Jahr hat also die Firma Panter einen Marktanteil von 39,32 % und die Firma Bedidas einen Marktanteil von 60,68%.

$$p_2 + b_2 = \frac{289}{735} + \frac{446}{735} = \frac{735}{735} = 1$$

Oder allgemein: Sei $p_{n-1} + b_{n-1} = 1$.

Dann ist $p_n + b_n = 1$, denn aus $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{3}{7} b_{n-1}$ und $b_n = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{4}{7} b_{n-1}$ folgt

$$p_n + b_n = (\frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{3}{7} b_{n-1}) + (\frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{4}{7} b_{n-1}) = (\frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} p_{n-1}) + (\frac{3}{7} b_{n-1} + \frac{4}{7} b_{n-1}) = p_{n-1} + b_{n-1} = 1$$

Lösung der Kontrollaufgabe 2

(a) Neue Verteilung

Panter: $p_1 = \frac{1}{2} p_0 + \frac{4}{9} b_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15} \approx 0{,}4667$

Bedidas: $b_1 = \frac{1}{2} p_0 + \frac{5}{9} b_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{15} \approx 0{,}5333$

(b) Ausgehend von der Verteilung p_k und b_k im k-ten Jahr wird die Verteilung im (k+1)-ten Jahr nach den Rekursionsformeln $p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k + \frac{4}{9} b_k$ und $b_{k+1} = \frac{1}{2} p_k + \frac{5}{9} b_k$. Die langfristigen Marktanteile ergeben sich aus den Grenzwerten für $k \to \infty$.

$$p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k + \frac{4}{9} b_k \qquad\qquad b_{k+1} = \frac{1}{2} p_k + \frac{5}{9} b_k$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \text{ , k} \to \infty \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \text{ , } k \to \infty$$

$$p = \frac{1}{2} p + \frac{5}{9} b \quad | -p \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2} p + \frac{5}{9} b \quad | -b$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$0 = -\frac{1}{2} p + \frac{4}{9} b \qquad\qquad 0 = \frac{1}{2} p - \frac{4}{9} b$$

Die beiden Gleichungen sind gleichwertig (Multiplikation mit -1). Es folgt $p = \frac{8}{9} b$. Wir setzen dies in Gleichung $p + b = 1$, die für die Grenzwerte p und b, ein:

$$p + b = 1 \overset{p=(8/9)b}{\Longrightarrow} \frac{8}{9} b + b = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{9} b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{9}{17} \Rightarrow p = \frac{8}{17}$$

Lösung der Kontrollaufgabe 3

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ \frac{22}{35} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3714 \\ 0{,}6286 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ \frac{22}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{289}{735} \\ \frac{446}{735} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3932 \\ 0{,}6068 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} p_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{289}{735} \\ \frac{446}{735} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3911 \\ 0{,}6089 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} p_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3911 \\ 0{,}6089 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3913 \\ 0{,}6087 \end{pmatrix}$$

Die Folge von Verteilungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$ kann besonders schnell berechnet werden, wenn das Ergebnis der Multiplikation [A]*[B] wieder in [B] gespeichert wird.

Tastenfolge: [A]*[B] STO [B], ENTER, ENTER, …

Lösung zu Kontrollaufgabe 4

	Panter	Bedidas
Panter	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$
Bedidas	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$
	1	1

(a) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$; $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$; $\vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{8}{15} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4667 \\ 0{,}5333 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{T}^3 \overset{GTRo.GeoGebra}{=} \begin{pmatrix} \frac{305}{648} & \frac{343}{729} \\ \frac{343}{648} & \frac{386}{729} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4707 & 0{,}4705 \\ 0{,}5293 & 0{,}5295 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_3 = \mathbf{T}^3 \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2287}{4860} \\ \frac{2573}{4860} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4706 \\ 0{,}5294 \end{pmatrix}$

$\mathbf{T}^6 \overset{GTRo.GEoGebra}{\approx} \begin{pmatrix} 0{,}4706 & 0{,}4706 \\ 0{,}5294 & 0{,}5294 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_6 = \mathbf{T}^6 \vec{x}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}4706 \\ 0{,}5294 \end{pmatrix}$

(c) Umformung

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathbf{T} \cdot \vec{x} \quad | -\mathbf{T} \cdot \vec{x} \\ \vec{x} - \mathbf{T} \cdot \vec{x} &= \vec{0} \\ \mathbf{E} \cdot \vec{x} - \mathbf{T} \cdot \vec{x} &= \vec{0} \\ (\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{9} & 0 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nullzeile mit der Gleichung $x_1 + x_2 = 1$ ersetzen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) | \cdot (-\tfrac{1}{2}) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{18} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) | \cdot (-\tfrac{18}{17}) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{17} \end{array} \right) | \cdot (-1) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{17} \\ 0 & 1 & \frac{9}{17} \end{array} \right)$$

$x_1 = \frac{8}{17}$ und $x_2 = \frac{9}{17}$;. Stabilitätsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4706 \\ 0{,}5294 \end{pmatrix}$