Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 9 - cociente con grado de numerador mayor o igual que grado de denominador

1. Resuelve $I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$

Tenemos un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Realizamos la división de los polinomios.

$$\frac{x^3}{x^2-5x+6}=x+\frac{5x^2-6x}{x^2-5x+6}$$

Y la integral nos queda:

$$I=\int \left(x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}dx$$

Llegamos a una segunda integral con el grado del numerador menor que el grado del denominador, por lo que hayamos las raíces del denominador.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \quad \rightarrow \quad \frac{19x-30}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \quad \rightarrow \quad 19x-30=A(x-3)+B(x-2)$$

Si $x=3 \quad \rightarrow \quad B=27$

Si $x=2 \quad \rightarrow \quad A=-8$

$$I=\frac{x^2}{2}+5x+\int \left(\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x-8\ln|x-2|+27\ln|x-3|+C$$

2. Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$ **.**

Tenemos un cociente de polinomios con igual grado en numerador y denominador.

Podemos dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador, para obtener un nuevo polinomio más un cociente de polinomios donde el grado del numerador sea menor que el grado del denominador (y así poder aplicar, por ejemplo, el método de integración de los coeficientes indeterminados).

O bien podemos llegar al mismo resultado razonando de la siguiente forma:

$$I=\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+(x-2)-(x-2)}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2}dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx$$

$$I=-\int dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx=-x+\int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}dx$$

Aplicamos en la integral que nos queda el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \rightarrow \quad x-2=A(x+2)+B(x-1)$$

Damos valores para obtener los coeficientes.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad -1=3A+0 \quad \rightarrow \quad A=\frac{-1}{3}$$

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad -4=0-3B \quad \rightarrow \quad B=\frac{4}{3}$$

Sustituimos.

$$I=-x-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \quad \rightarrow \quad I=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

La ecuación punto-pendiente de una recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Como la recta buscada es tangente a la función en $x=1$, la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función evaluada en $x=1$ $\rightarrow$ $f'(1)=\frac{(1-1)^2}{1+1}=0$ $\rightarrow$ $m=0$.

Si $x_0=1$ entonces $y_0=f(1)$, ya que la función y la recta tangente coinciden en el punto $(1, f(1))$.

Para obtener el valor de la imagen $f(1)$ debemos integrar la función derivada $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$, para conseguir la función primitiva $f(x)$. La constante de integración inherente al proceso de integración podemos determinarla gracias a la condición del enunciado $f(0)=0$.

$$f(x)=\int \frac{(x-1)^2}{x+1}\,dx=\int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx$$

Tenemos un cociente de polinomios. Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, realizamos la división.

$$\frac{Dividendo}{divisor}=Cociente+\frac{Resto}{divisor} \rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1}=x-3+\frac{4}{x+1}$$

$$f(x)=\int (x-3)\,dx+\int \frac{4}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|+C$$

La constante de integración queda definida de manera única con la condición $f(0)=0$ $\rightarrow$ $C=0$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|$$

Una vez obtenida la función primitiva, podemos calcular $f(1)$.

$$f(1)=\frac{1}{2}-3+4\ln|2|=\frac{-5}{2}+4\ln(2)\simeq 0,27$$

La recta tangente a la función en $x=1$ resulta una recta horizontal (pendiente nula).

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \rightarrow \quad 0=\frac{y-f(1)}{x-1} \quad \rightarrow \quad y=f(1) \quad \rightarrow \quad y\simeq 0,27$$

4. Resuelve $\int \frac{4x^3}{x^2+x}dx$

$I=\int \frac{4x^3}{x^2+x}dx=4\int \frac{x^2}{x+1}dx$ → Realizamos el cociente de polinomios

$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1} \rightarrow I=4\int (x-1+\frac{1}{x+1})dx=4[\int x\,dx-\int dx+\int \frac{1}{x+1}dx]$

$I=2x^2-4x+4\ln|x+1|+C$