Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 17 - igualdades trigonométricas

1. Demuestra la siguiente igualdad $sen(x+y)sen(x-y)=sen^2 x-sen^2 y$

Desarrollamos el seno de la suma y el seno de la diferencia.

$$sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y) \quad , \quad sen(x-y)=sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)$$

Multiplicamos ambas expresiones, tal y como aparece en el término izquierdo de la igualdad de partida.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=[sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y)]\cdot[sen(x)\cos(y)-\cos(x)sen(y)]$$

Operamos el producto suma por diferencia, igual a diferencia de cuadrados.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot\cos^2(y)-\cos^2(x)\cdot sen^2(y)$$

De la relación fundamental de trigonometría tenemos:

$$\cos^2(y)=1-sen^2(y) \quad , \quad \cos^2(x)=1-sen^2(x)$$

Sustituimos y operamos.

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)\cdot(1-sen^2(y))-(1-sen^2(x))\cdot sen^2(y)$$
$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(x)\cdot sen^2(y)-sen^2(y)+sen^2(x)\cdot sen^2(y)$$
$$sen(x+y)\cdot sen(x-y)=sen^2(x)-sen^2(y)$$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

2. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{sen(2x)}{1+\cos(2x)}=tg\,x$

b) $sen(x+y)sen(x-y)=sen^2 x-sen^2 y$

c) $tg(3x)=\dfrac{3\,tg\,x-tg^3 x}{1-3\,tg^2 x}$

d) $\dfrac{sen\,a+sen(3a)}{\cos a-\cos(3a)}=cotg\,a$

a) $\dfrac{sen(2x)}{1+\cos(2x)} \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{1+\left(\cos^2 x-sen^2 x\right)} \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{\left(sen^2 x+\cos^2 x\right)+\left(\cos^2 x-sen^2 x\right)}$

$\dfrac{2\,sen\,x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} \rightarrow \dfrac{sen\,x\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos x} \rightarrow \dfrac{sen\,x}{\cos x} \rightarrow tg(x)$ c.q.d.

b) $sen(x+y)\cdot sen(x-y)=(sen\,x\cdot\cos y+\cos x\cdot sen\,y)\cdot(sen\,x\cdot\cos y-\cos x\cdot sen\,y)$

$sen^2 x\cos^2 y-sen\,x\cdot\cos y\cdot\cos x\cdot sen\,y+\cos x\cdot sen\,y\cdot sen\,x\cdot\cos y-\cos^2 x\,sen^2 y$

$sen^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\,sen^2 y=sen^2 x\left(1-sen^2 y\right)-\left(1-sen^2 x\right)sen^2 y$

$sen^2 x-sen^2 x\,sen^2 y-sen^2 y+sen^2 x\,sen^2 y$

$sen^2 x-sen^2 y$ c.q.d.

c) $tg(3x)=tg(2x+x)=\dfrac{tg(2x)+tg\,x}{1-tg(2x)\cdot tg\,x}$

$\dfrac{\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2 x}+tg\,x}{1-\dfrac{2tg\,x}{1-tg^2 x}tg\,x}=\dfrac{\dfrac{2\,tg\,x+tg\,x\left(1-tg^2 x\right)}{1-tg^2 x}}{\dfrac{\left(1-tg^2 x\right)-2\,tg(x)\cdot tg(x)}{1-tg^2 x}} \rightarrow \dfrac{2\,tg\,x+tg\,x-tg^3 x}{1-tg^2 x-2\,tg^2 x} \rightarrow \dfrac{3\,tg\,x-tg^3 x}{1-3\,tg^2 x}$ c.q.d.

d) $\dfrac{sen\, a+sen(3a)}{\cos a-\cos(3a)}=cotg\, a$

$$\frac{sen\, a+sen(3a)}{\cos a-\cos(3a)}=\frac{sen\, a+sen(2a+a)}{\cos a-\cos(2a+a)} \rightarrow \frac{sen\, a+[sen(2a)\cdot\cos a+\cos(2a)\cdot sen\, a]}{\cos a-[\cos(2a)\cdot\cos a-sen(2a)\cdot sen\, a]}$$

$$\frac{sen\, a+[(2\, sen\, a\cdot\cos a)\cdot\cos a+(\cos^2 a-sen^2 a)\cdot sen\, a]}{\cos a-[(\cos^2 a-sen^2 a)\cdot\cos a-(2\, sen\, a\cdot\cos a)\cdot sen\, a]}$$

$$\frac{sen\, a+2\, sen\, a\cdot\cos^2 a+sen\, a\cdot\cos^2 a-sen^3 a}{\cos a-\cos^3 a+\cos a\cdot sen^2 a+2\, sen^2 a\cdot\cos a}$$

$$\frac{sen\, a\cdot(1+2\cos^2 a+\cos^2 a-sen^2 a)}{\cos a\cdot(1-\cos^2 a+sen^2 a+2\, sen^2 a)}$$

$$\frac{sen\, a\cdot(sen^2 a+\cos^2 a+3\cos^2 a-sen^2 a)}{\cos a\cdot(sen^2 a+\cos^2 a-\cos^2 a+3\, sen^2 a)}$$

$$\frac{sen\, a\cdot(4\cos^2 a)}{\cos a\cdot(4\, sen^2 a)}=\frac{4 sen\, a\cdot\cos^2 a}{4\cos a\cdot sen^2 a}=\frac{\cos a}{sen\, a}=cotg\, a \quad \text{c.q.d.}$$

3. Comprueba $\frac{tg(A)cotg(B)+1}{tg(A)cotg(B)-1}=\frac{sen(A+B)}{sen(A-B)}$.

Sustituimos $tg(A)=\frac{sen(A)}{\cos(A)}$ y $cotg(B)=\frac{\cos(B)}{sen(B)}$.

$$\frac{\frac{sen(A)}{\cos(A)}\cdot\frac{\cos(B)}{sen(B)}+1}{\frac{sen(A)}{\cos(A)}\cdot\frac{\cos(B)}{sen(B)}-1}=\frac{sen(A+B)}{sen(A-B)}$$

Operamos en el término de la izquierda.

$$\frac{\frac{sen(A)\cdot\cos(B)+\cos(A)\cdot sen(B)}{\cos(A)\cdot sen(B)}}{\frac{sen(A)\cdot\cos(B)-\cos(A)\cdot sen(B)}{\cos(A)\cdot sen(B)}}=\frac{sen(A+B)}{sen(A-B)}$$

Simplificamos. En el término de a izquierda reconoceremos la definición del seno de la suma y del seno de la diferencia.

$$\frac{sen(A)\cdot\cos(B)+\cos(A)\cdot sen(B)}{sen(A)\cdot\cos(B)-\cos(A)\cdot sen(B)}=\frac{sen(A+B)}{sen(A-B)} \rightarrow \frac{sen(A+B)}{sen(A-B)}=\frac{sen(A+B)}{sen(A-B)}$$ → c.q.d.

4. Demuestra la siguiente igualdad $\frac{sen(x+x)}{\cos(x+x)-1}=-cotg\ x$

Usamos las relaciones del seno del ángulo doble y del coseno del ángulo doble, y la relación fundamental de trigonometría.

$$sen(2x)=2\,sen(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$
$$1=\cos^2(x)+sen^2(x)$$

Sustituimos en la igualdad de partida.

$$\frac{2\,sen(x)\cos(x)}{\cos^2(x)-sen^2(x)-\cos^2(x)-sen^2(x)}=-cotg(x) \rightarrow \frac{2\,sen(x)\cos(x)}{-2\,sen^2(x)}=-cotg(x)$$

$\frac{\cos(x)}{-sen(x)}=-cotg(x) \rightarrow -cotg(x)=-cotg(x) \rightarrow$ c.q.d.

5. Demuestra la siguiente igualdad $cotg^2(x)-\cos^2(x)=cotg^2(x)\cdot\cos^2(x)$ **.**

Expresamos la cotangente como cociente entre coseno y seno.

$$\frac{\cos^2(x)}{sen^2(x)}-\cos^2(x)=\frac{\cos^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}$$

Operamos.

$$\frac{\cos^2(x)-sen^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$

En el numerador del término de la izquierda sacamos factor común de coseno cuadrado.

$$\frac{\cos^2(x)[1-sen^2(x)]}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$

De la relación fundamental → $1-sen^2(x)=\cos^2(x)$ → Sustituimos.

$$\frac{\cos^2(x)\cdot\cos^2(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)} \quad\rightarrow\quad \frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}=\frac{\cos^4(x)}{sen^2(x)}$$ → c.q.d.

6. Comprobar la siguiente igualdad: $\frac{sen(2\cdot a)}{1-\cos^2 a}\cdot\frac{sen(2\cdot a)}{\cos a}=4\cos a$

Partimos de la expresión del ángulo doble

$$sen(2a)=2\,sen(a)\cos(a)$$

Sustituimos en la igualdad de partida.

$$\frac{4\,sen^2(a)\cdot\cos^2(a)}{(1-\cos^2(a))\cos(a)}=4\cos(a)$$

De la relación fundamental de trigonometría: $1-\cos^2 a=sen^2 a$

$$\frac{4\,sen^2 a\cdot\cos^2 a}{(sen^2 a)\cos a}=4\cos a$$

Simplificamos → $4\cos a=4\cos a$ → c.q.d.