Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 10 - vectores linealmente independientes

1. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,0)$, $\vec{w}=(m,0,0)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si al menos uno de los coeficientes de la siguiente igualdad es distinto de cero.

$$(0,0,0)=a(1,1,1)+b(2,-1,0)+c(m,0,0)$$

Generamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a, b, c

$$\begin{Bmatrix} a+2b+mc=0 \\ a-b=0 \\ a=0 \end{Bmatrix}$$

Estamos ante un sistema homogéneo, ya que todos los términos independientes son nulos.

Si un sistema homogéneo tiene solución única, sería $a=0, b=0, c=0$, por lo que los vectores serían linealmente independientes. Si tiene infinitas soluciones, entonces al menos una de las incógnitas podría ser no nula, por lo que los vectores serían dependientes.

De la tercera ecuación → $a=0$ → Llevado a la segunda ecuación $b=0$

Sustituyendo estos resultados en la tercera ecuación → $mc=0$ → $c=0$ si y solo si el parámetro $m\neq 0$, ya que no podemos dividir por cero.

Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes si $m\neq 0$.

Otra forma de razonar es la siguiente: estudiar el rango del conjunto de vectores en función del parámetro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \leftarrow\rightarrow C_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Discusión de casos: si $m=0$ el rango es igual a 2 y los tres vectores son linealmente dependientes.

Si $m\neq 0$ el rango es igual a 3 y los tres vectores son linealmente independientes.

2. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-2,5)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$, $\vec{w}=(-1,1,m)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si al menos uno de los coeficientes de la siguiente igualdad es distinto de cero.

$$(0,0,0)=a(1,-2,5)+b(-2,3,1)+c(-1,1,m)$$

Generamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a, b, c

$$\left\{\begin{array}{c} a-2b-c=0 \\ -2a+3b+c=0 \\ 5a+b+mc=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=F_2+2F_1 \quad , \quad F_3'=F_3-5F_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & m+5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3+11F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-6 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(m-6)c=0$ → La solución $c=0$ es la única siempre y cuando → $m-6\neq 0 \rightarrow m\neq 6$

Otra forma de razonar es la siguiente: estudiar el rango del conjunto de vectores en función del parámetro.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2+2F_1 \quad , \quad F_3'=F_3-5F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 11 & m+5 \end{pmatrix}$$

$$F_3'=F_3+11F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m-6 \end{pmatrix}$$

Discusión de casos: si $m=6$ el rango es 2 y los tres vectores son linealmente dependientes.

Si $m\neq 6$ el rango es 3 y los vectores son linealmente independientes.

3. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,m,2)$, $\vec{w}=(3,1,m)$ sean linealmente independientes.

Planteamos la definición de independencia lineal.

$$a(2,0,-1)+b(1,m,2)+c(3,1,m)=(0,0,0)$$

Los tres vectores de partida serán linealmente independientes si los coeficientes a,b,c tienen como solución única el valor 0 .

$$(2a+b+3c\,,0+mb+c\,,-a+2b+mc)=(0,0,0)$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 2a+b+3c=0 \\ mb+c=0 \\ -a+2b+mc=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{matriz ampliada} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=2F_3+F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2m+3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=mF_3-5F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^2+3m-5 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(2m^2+3\mathrm{m}-5)c=0$

Para obtener como solución única $c=0$ necesitamos que el factor $(2m^2+3m-5)\neq 0$. Si resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4} \rightarrow \text{Concluimos} \rightarrow m\neq 1,-\frac{5}{2}$$

El parámetro m puede tomar cualquier valor, salvo $m\neq 1,-\frac{5}{2}$, para garantizar que $c=0$ sea solución única de la incógnita.

Si $c=0$ de la segunda ecuación → $mb=0$ → ¿Podemos afirmar que si $m=0$ tendríamos la incógnita b con infinitas soluciones?

No... ¿por qué?

Si repasamos las transformaciones lineales que aplicamos por Gauss, en uno de los pasos planteamos:

$F_3'=mF_3-5F_2 \rightarrow$ si $m=0 \rightarrow F_3'=-5F_2$

Y esta transformación no está permitida ya que estamos cambiando una fila por el valor de otra. Y esto inhabilita la conclusión de que si $m=0$ tendríamos infinitas soluciones. Por lo tanto, debemos estudiar qué ocurre para $m=0$ en el paso previo a la operación no permitida (tal y como hemos realizado tantas veces en temas anteriores al estudiar sistemas de ecuaciones que dependían de un parámetro).

si $m=0$ nos queda antes de la transformación no permitida $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Intercambiamos las filas segunda y tercera $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Y llegamos a un sistema con solución única donde las incógnitas toman los valores $a=b=c=0$, por lo que los vectores serían linealmente independientes..

Conclusión: cualquier valor real salvo $m=1,-\frac{5}{2}$ hace que los vectores sean independientes.

Otra forma de razonar: estudiar el rango de la matriz formada por los tres vectores, mediante el método de Gauss. Deberemos aplicar las mismas transformaciones lineales que hemos planteado en el anterior sistema de ecuaciones homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=2F_3+F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 5 & 2m+3 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=mF_3-5F_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 2m^2+3m-5 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, en la discusión de casos, aparecen los valores $m=1,-\frac{5}{2}$ y el valor $m=0$ (que inhabilita Gauss). Para $m\neq 1,-\frac{5}{2}$ tendremos nuevamente los valores que hacen a los vectores linealmente independientes, ya que el rango será igual a 3.

Como vemos, tanto planteando un sistema homogéneo como una matriz de vectores, las conclusiones son las mismas.

4. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(-1,2)$, $\vec{w}=(0,3)$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ comprueba que no son linealmente independientes.

Si en un conjunto de vectores alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás, entonces el conjunto es linealmente dependiente. Esto implicaría que los vectores están ligados entre si.

Para demostrarlo, intentamos expresar uno de los vectores como combinación lineal de los otros dos:

$$(0,3)=a(1,1)+b(-1,2) \quad \rightarrow \quad (0,3)=(a-b\,,a+2\mathrm{b})$$

Igualando componentes obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0=a-b \\ 3=a+2b \end{pmatrix} \rightarrow \text{soluciones:} \quad a=1 \quad , \quad b=1$$

Como al menos uno de los dos factores es no nulo, podemos decir que el conjunto es linealmente dependiente.

Otra forma de razonar: plantear una matriz con los tres vectores y comprobar que el rango es inferior al número de vectores. Esto implicaría que los tres vectores no son linealmente independientes entre sí.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad F'_2=F_2+F_1 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dos filas iguales: obviamos una de ellas} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tras terminar Gauss, y comprobar que no hay más filas proporcionales, obtenemos dos vectores con al menos una componente no nula. El rango del conjunto de vectores es 2. Por lo tanto, los tres vectores no son linealmente independientes.

5. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(4,-2,m)$ sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si todos los coeficientes de la siguiente relación son nulos:

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad a(1,-1,2)+b(2,0,1)+c(4,-2,m)=(0,0,0)$$

Igualando componentes obtenemos un vector de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} a+2b+4c=0 \\ -a-2c=0 \\ 2a+b+mc=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \longleftrightarrow C_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3'=2F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2m-4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=F_3+3F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m-10 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(2m-10)c=0 \quad \rightarrow \quad c=0$ si y solo si $2m-10\neq 0 \quad \rightarrow \quad m\neq 5$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes si la única solución posible es la arbitraria $a=0, b=0, c=0$. Y esto se cumple si el parámetro $m\neq 5$.

Como ya sabemos, hay otra forma de razonar: estudiar el rango de los tres vectores y discutir los valores del parámetro para que el rango sea igual a 3, ya que así los tres vectores serían linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \longleftrightarrow C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=2F_3-F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2m-4 \end{pmatrix}$$

$$F_3'=F_3+3F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2m-10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{discusión de casos:} \quad 2m-10=0$$

Nuevamente, en la discusión de casos, aparece el valor $m=5$.

Para $m=5$ el rango es 2. Para $m\neq 5$ el rango es 3 y los vectores son linealmente independientes.

Como vemos, tanto planteando un sistema homogéneo como una matriz de vectores, las conclusiones son las mismas.

6. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(m,1,3)$, $\vec{v}=(0,m,-4)$, $\vec{w}=(1,2,-1)$ sean linealmente independientes.

Planteamos la definición de independencia lineal, y forzamos que la solución del sistema sea única (solución trivial).

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=(0,0,0) \rightarrow \left\{\begin{matrix} ma+c=0 \\ a+mb+2c=0 \\ 3a-4b-c=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3 \longleftrightarrow F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & m & 2 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=3F_2-F_1 \ , \ F_3'=3F_3-mF_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3m+4 & 7 & 0 \\ 0 & 4m & 3+m & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$F_3'=(3m+4)F_3-4mF_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3m+4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3m^2-15m+12 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(3m^2-15m+12)c=0$ → La solución única será $c=0$ siempre y cuando $3m^2-15m+12\neq 0$ → Resolvemos la inecuación:

$$m\neq\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{6} \rightarrow m\neq\frac{15\pm 9}{6} \rightarrow m\neq 1 \ , \ m\neq 4$$

Si $c=0$ → De la segunda ecuación → $(3m+4)b=0$ → La solución única será $b=0$ siempre y cuando $3m+4\neq 0$ → $m\neq\frac{-4}{3}$ → Este valor no lo consideramos porque invalidaría una de las transformaciones lineales aplicadas en el método de Gauss.

Y ya sabemos otra forma de razonar: plantear una matriz con los tres vectores y estudiar los valores del parámetro para que el rango sea igual a 3.

Por no ser repetitivo, esta vez basta con recordar esta segunda forma de razonar.

7. a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ que hacen linealmente independientes los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,k+1,1)$, $\vec{w}=(1,1,k+1)$.

b) Para $k=2$, demostrar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

a) Son linealmente independientes si el siguiente sistema tiene solución única $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$$

$$\left\{\begin{matrix} a+b+c=0 \\ a+(k+1)b+c=0 \\ a+b+(k+1)c=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- $k=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → S.C.I. → Infinitas soluciones → 3 incógnitas y 1 ecuación → 2 parámetros libres → Linealmente dependientes.
- $k\neq 0$ → S.C.D. → Solución única $a=0$, $b=0$, $c=0$ → Linealmente independientes.

Ya sabemos que podríamos haber estudiado el rango de la matriz formada por los tres vectores, y determinar qué valores del parámetro provoca que el rango sea igual a 3. Llegaríamos a las mismas conclusiones del anterior estudio del sistema de ecuaciones homogonéo.

b) Para $k=2$ debemos demostrar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

$$\vec{u}=(1,1,1) \ , \ \vec{v}=(1,3,1) \ , \ \vec{w}=(1,1,3)$$

Realizamos cada término de la igualdad y comprobamos que coinciden:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(1,1,1)\cdot[(1,3,1)+(1,1,3)]=(1,1,1)\cdot(2,4,4)=1\cdot 2+1\cdot 4+1\cdot 4=10$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=(1,1,1)\cdot(1,3,1)+(1,1,1)\cdot(1,1,3)=1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 3=10$$