Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 4 - composición de funciones

1. Realiza la composición $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ de las siguientes parejas de funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2 \quad , \quad (g\circ f)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

$$(f\circ g)(x)=f(\sqrt{2x-4})=(\sqrt{2x-4})^2-\sqrt{2x-4}-2=2x-4-\sqrt{2x-4}-2=2x-\sqrt{2x-4}-6$$

$$(g\circ f)(x)=g(x^2-x-2)=\sqrt{2(x^2-x-2)-4}=\sqrt{2x^2-2x-8}$$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}+3}{\frac{x^2-1}{x}-3}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x-1}$$

$$(g\circ f)(x)=g\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-1}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{12x}{(x-3)(x+3)}=\frac{12x}{x^2-9}$$

2. Sea $f(x)=x^2-5x+3$ **y** $g(x)=x^2$ **. Obtén** $f[g(x)]$ **y** $g[f(x)]$ **.**

$$f[g(x)]=f[x^2]=(x^2)^2-5(x^2)+3=x^4-5x^2+3$$

$$g[f(x)]=g[x^2-5x+3]=(x^2-5x+3)^2=x^4-10x^3+31x^2-30x+9$$

3. Sea $f(x)=sen(x)$ **y** $g(x)=x^2+5$ **. Obtén** $f[g(x)]$ **,** $g[f(x)]$ **,** $f[f(x)]$ **y** $g[g(x)]$ **. Hallar el valor de estas composiciones de funciones en** $x=0$ **y en** $x=2$ **.**

Hacemos las composiciones, recordando que los valores $x=0$ y $x=2$ indican radianes al ser sustituidos dentro de la función seno (ojo con la calculadora).

$$f[g(x)]=f[x^2+5]=sen(x^2+5)$$
$$f[g(0)]=sen(5)=-0,95$$
$$f[g(2)]=sen(9)=0,41$$

$$g[f(x)]=g[sen(x)]=sen^2(x)+5$$
$$g[f(0)]=5$$
$$g[f(2)]=sen^2(2)+5=5,82$$

$$f[f(x)]=f[sen(x)]=sen(sen(x))$$
$$f[f(0)]=sen(sen(0))=sen(0)=0$$
$$f[f(2)]=sen(sen(2))=sen(0,90)=0,79$$

$$g[g(x)]=g[x^2+5]=(x^2+5)^2+5$$
$$g[g(0)]=25+5=30$$
$$g[g(2)]=(4+5)^2+5=86$$

4. Sea $f(x)=x^2+1$ **y** $g(x)=\frac{1}{x}$ **. Obtener las siguientes composiciones:** $(f\circ g)(2)$ **,** $(g\circ g)(x)$ **,** $(g\circ f)(-3)$ **,** $(f\circ g)(x)$ **.**

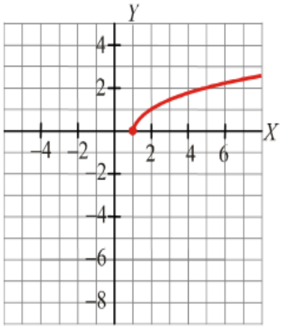
$$(f\circ g)(2)=f[g(2)]=f[\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$(g\circ g)(x)=g[g(x)]=g[\frac{1}{x}]=x$$

$$(g\circ f)(-3)=g[f(-3)]=g[9+1]=g[10]=\frac{1}{10}$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[\frac{1}{x}]=\frac{1}{x^2}+1=\frac{1+x^2}{x^2}$$

5. Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



Dos funciones inversas $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ cumplen que la imagen de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$. Por lo tanto, si $f(x_0)=y_0 \rightarrow f^{-1}(y_0)=x_0$

$f^{-1}(0)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=0$? → $f(1)=0 \rightarrow x_0=1 \rightarrow f^{-1}(0)=1$

$f^{-1}(2)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=2$? → $f(5)=2 \rightarrow x_0=5 \rightarrow f^{-1}(2)=5$

6. Calcular la función inversa de $f(x)=3x$ **,** $g(x)=x+7$ **y** $h(x)=3x-2$ **y comprobar que sus respectivas composiciones dan lugar a la función identidad.**

$$f(x)=3x \rightarrow y=3x \rightarrow \frac{y}{3}=x \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{3}$$

$$f[f^{-1}(x)]=f[\frac{x}{3}]=x \quad , \quad f^{-1}[f(x)]=f^{-1}[3x]=x$$

$$g(x)=x+7 \rightarrow y=x+7 \rightarrow y-7=x \rightarrow g^{-1}(x)=x-7$$

$$g[g^{-1}(x)]=g[x-7]=x \quad , \quad g^{-1}[g(x)]=g^{-1}[x+7]=x$$

$$h(x)=3x-2 \rightarrow y=3x-2 \rightarrow \frac{y+2}{3}=x \rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$$

$$h[h^{-1}(x)]=h[\frac{x+2}{3}]=x \quad , \quad h^{-1}[h(x)]=h^{-1}[3x-2]=x$$

7. Dada las funciones $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ **y** $g(x)=x^2-1$ **, calcula** $(g\circ f)(x)$ **y** $(f\circ g)(x)$

$$(g\circ f)(x) \rightarrow g[\frac{x-1}{x+1}]=(\frac{x-1}{x+1})^2-1=\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{-4x}{(x+1)^2}$$

$$(f\circ g)(x) \rightarrow f[x^2-1]=\frac{x^2-1-1}{x^2-1+1}=\frac{x^2-2}{x^2}$$