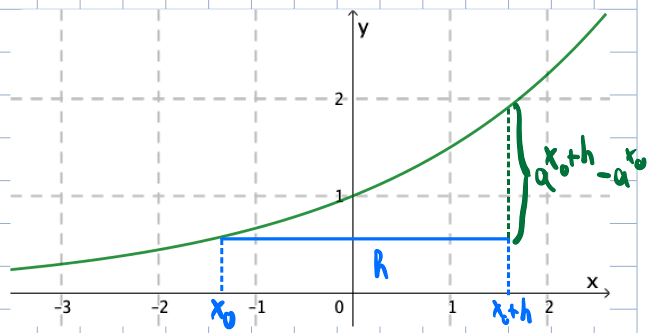
1. Die natürliche Exponentialfunktion



Gesucht wird ein $a \in \mathbb{R}$, für das gilt, dass die Ableitungsfunktion f' und die Funktion f denselben Term besitzen, nämlich a^x.

Dazu wird der Differentialquotient verwendet:

$$f'(x_0) = f(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h}$$

$$= a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \overset{!}{=} a^{x_0} \quad \Big| : a^{x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \overset{!}{=} 1$$

$$\xRightarrow{h = \frac{1}{n}} \lim_{n \to \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \overset{!}{=} 1$$

Für $n \to \infty$ gilt also $a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

MERKE

Der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl, die Eulersche Zahl
$e \approx 2{,}71828\ldots$

Die Funktion $f: x \longmapsto e^x$ nennen wir die natürliche Exponentialfunktion und sie besitzt als Ableitungsfunktion die Funktion $f': x \longmapsto e^x$.