Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 4 - puntos alineados y división de segmentos

1. Dado los puntos $A(-1,0,2)$, $B(-7,-6,-4)$ y $C(2,3,5)$ comprueba si están alineados. Hazlo utilizando vectores y hazlo utilizando rectas.

Con vectores

Dos vectores son paralelos o antiparalelos (es decir, proporcionales) si el cociente de las primeras componentes de los vectores es igual al cociente de las segundas componentes, y a su vez es igual al cociente de las terceras componentes. Es decir:

$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{u}=(v_x,v_y,v_z)$ son proporcionales <==> $\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}=\frac{u_z}{v_z}$

Comprobemos esta relación con nuestros vectores $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ y $\vec{AC}=(3,3,3)$.

$\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}$ → Vectores antiparalelos

El factor de proporción es negativo, al valer -6/2 = -2 → los vectores sí están alineados.

Con rectas

Vamos a trazar la recta que pasa por los puntos A y B. Para ellos, el vector director paralelo a la recta será:

$\vec{AB}=(-6,-6,-6)$

Un truco para trabajar con números lo más pequeños posibles. Del vector $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ nos interesa su inclinación, para ser paralelo a la recta. Por lo tanto el vector director puede ser $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ o bien cualquier otro vector paralelo o antiparalelo a él. Por ejemplo: $\vec{u}=(1,1,1)$.

Repito. Este paso no es necesario. Lo hago simplemente porque $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ son proporcionales, y los coeficientes del vector $\vec{u}$ son más pequeños.

Un punto de la recta que estamos buscando será $A(-1,0,2)$. En consecuencia: **con un punto de la recta y un vector director, puedo escribir la ecuación de la recta**. Por ejemplo, la continua:

$$r:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \rightarrow r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

Ahora debemos si el tercer punto $C(2,3,5)$ pertenece a la recta. Para ello, comprobamos si satisface dicha ecuación. Tomamos las coordenadas de $C(2,3,5)$ y las sustituimos en las posiciones de x, y, z respectivamente.

$\frac{2+1}{-1}=\frac{3}{-1}=\frac{5-2}{-1} \rightarrow -3=-3=-3$ → Se cumplen todas las igualdades → Sí están alineados.

2. Dividir el segmento formado por los puntos $P(-1,0,2)$ y $Q(-7,-6,-4)$ en tres partes iguales.

Consideramos el punto $A(x,y,z)$ como aquel que da lugar a $\frac{1}{3}$ del segmento total.

$$\vec{PA}=\frac{1}{3}\vec{PQ} \quad \rightarrow \quad (x+1,y-0,z-2)=\frac{1}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$$

Dos vectores son iguales si sus componentes son iguales.

$$x+1=-2 \quad \rightarrow \quad x=-3$$

$$y=-2$$

$$z-2=-2 \quad \rightarrow \quad z=0$$

Por lo tanto: $A(-3,-2,0)$

Ahora calculamos el punto $B(x,y,z)$ que da lugar a $\frac{2}{3}$ del segmento.

$$\vec{PB}=\frac{2}{3}\vec{PQ} \quad \rightarrow \quad (x+1,y-0,z-2)=\frac{2}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$$

Igualamos componentes:

$$x+1=-4 \quad \rightarrow \quad x=-5$$

$$y=-4$$

$$z-2=-4 \quad \rightarrow \quad z=-2$$

Por lo tanto: $B(-5,-4,-2)$