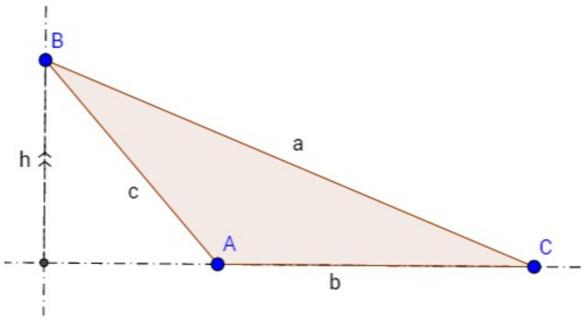
Teoría – Tema 2

Teoría - 15 - área de un triángulo

Conocido un lado y la altura correspondiente

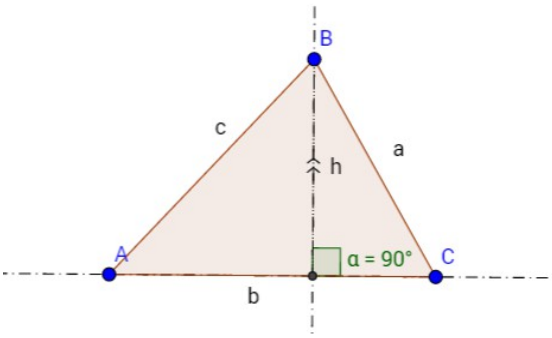
Esta fórmula del área es bien conocida. El área del triángulo es la mitad del área del cuadrilátero que lo contiene.



$$S=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura \quad \rightarrow \quad S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$$

Conocido dos lados y el ángulo comprendido por ambos lados

Sea el triángulo arbitrario de la imagen.



Aplicando la definición del seno en triángulos rectángulos:

$$sen(\hat{A})=\frac{h}{c} \quad \rightarrow \quad h=c\cdot sen(\hat{A})$$

Si llevamos este resultado a la ecuación del área:

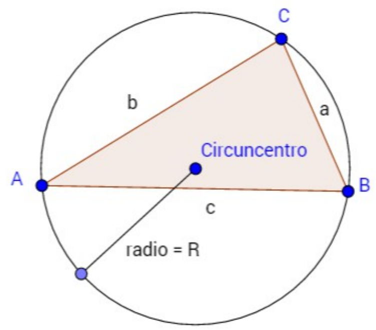
$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h \quad \rightarrow \quad S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot sen(\hat{A})$$

Es decir, el área de un triángulo es el semiconductor de cualquiera de dos de sus lados, por el seno del ángulo que forman ambos lados.

Conocido los tres lados y el radio de la circunferencia circunscrita

Partimos de la relación del teorema del seno con el radio de la circunferencia circunscrita.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}}=\frac{c}{sen\,\hat{C}}=2R \quad \rightarrow \quad sen(\hat{A})=\frac{a}{2R}$$



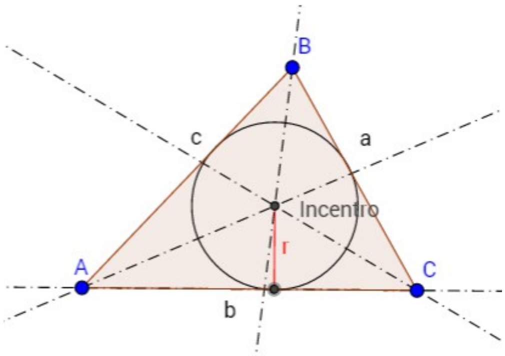
Si llevamos este valor del seno a la relación obtenida en el apartado anterior:

$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot sen(\hat{A}) \quad \rightarrow \quad S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\frac{a}{2R} \quad \rightarrow \quad S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

Es decir, el área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y el doble del diámetro de la circunferencia circunscrita.

Conocido los tres lados y el radio de la circunferencia inscrita

La circunferencia inscrita es aquella centrada en el incentro y que corta de manera tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el punto de corte de las bisectrices del triángulo.



Como vemos en la imagen superior, el triángulo de partida ABC podemos dividirlo en tres triángulos (I es el incentro, r el radio de la circunferencia inscrita):

$$AIB \rightarrow S_{AIB}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot r$$

$$BIC \rightarrow S_{BIC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot r$$

$$AIC \rightarrow S_{AIC}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$$

La suma de las áreas de los tres triángulos es igual al área total del triángulo ABC .

$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot r+\frac{1}{2}\cdot a\cdot r+\frac{1}{2}\cdot b\cdot r \rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)$$

La suma de los lados es igual al perímetro → $a+b+c=p \rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot p\cdot r$

El área es el semiproducto del perímetro por el radio de la circunferencia inscrita.