SPA4 : Equations différentielles.

I/ Définition :

Une équation différentielle est une équation pour laquelle la solution n'est pas un nombre mais un ensemble de fonctions. Autrement dit résoudre une équation différentielle c'est rechercher une fonction ou un ensemble de fonction vérifiant l'égalité.

Dans une équation différentielle (abréviation : ED), on note y' la dérivée de la fonction recherchée et y la fonction recherchée. Au cours de ce chapitre nous résoudrons des équations du type :

$y' + ay = 0$ et $y' + ay = b$

Pour résoudre une ED, il suffit d'identifier son type parmi les deux cités ci-dessus, ensuite il faudra appliquer la méthode de résolution correspondant au type d'équation.

Il faudra peut-être manipuler l'égalité pour se rapporter à un type d'équation connue.

II/ Equation du type $y' + ay = 0$.

Nous admettrons que les solutions de ce type d'équations sont toutes de la forme :

$$f(x) = ke^{-ax} \ \ avec\ k \in R^*$$

Exemples de résolution :

$$y' + 2y = 0$$

On reconnait une ED de type $y' + ay = 0$ avec $a = 2$, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{-2x} \ \ avec\ k \in R^*$$

$$y' = 8y$$

$$y' - 8y = 0$$

On reconnait une ED du type y' + ay = 0 avec a = -8, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{8x} \ \ avec\ k \in R^*$$

III/ Equation du type $y' + ay = b$.

Nous admettrons que les solutions de ce type d'équations sont toutes de la forme :

$$f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a} \ \ avec\ k \in R^*$$

Exemples de résolution :

$$y' + 2y = 7$$

On reconnait une ED de type $y' + ay = 0$ avec $a = 2$ et $b = 7$, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{-2x} + \frac{7}{2} \ \ avec\ k \in R^*$$

$$y' - 5 = 8y$$

$$y' - 8y = 5$$

On reconnait une ED du type $y' + ay = 0$ avec $a = -8$ et $b = 5$, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{8x} - \frac{5}{8} \ avec\ k \in R^*$$

IV/ Recherche d'une solution particulière.

Selon le contexte de l'exercice, au lieu de chercher un ensemble de fonctions, on peut chercher une fonction particulière, c'est-à-dire une valeur particulière de *k*. On va donc suivre les étapes de résolutions. Et ensuite utiliser les conditions données dans l'énoncé pour trouver la valeur de *k*.

Exemples de résolution :

Résoudre l'équation suivante, sachant que $f(1) = 4$

$$y' + 2y = 0$$

Etape 1 : *On identifie le type d'équation ainsi que ses différents paramètres :*

On reconnait une ED de type $y' + ay = 0$ avec $a = 2$, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{-2x} \ \ avec\ k \in R^*$$

Etape 2 : *On utilise les conditions initiales pour trouver la valeur de k.*

On sait que $f(1) = 4$

Donc : $f(1) = ke^{-2\times 1} = ke^{-2} = 4$

D'où : $k = \frac{4}{e^{-2}} = 4e^2$

Donc :

$$f(x) = 4e^2e^{-2x} = 4e^{-2x+2}$$

Résoudre l'équation suivante, sachant que $f(0) = 5$

$$y' - 5 = 8y$$

$$y' - 8y = 5$$

Etape 1 : *On identifie le type d'équation ainsi que ses différents paramètres :*

On reconnait une ED du type $y' + ay = 0$ avec $a = -8$ et $b = 5$, donc les solutions sont toutes les fonctions du type :

$$f(x) = ke^{8x} - \frac{5}{8}\ avec\ k \in R^*$$

Etape 2 : *On utilise les conditions initiales pour trouver la valeur de k.*

On sait que $f(0) = 5$

Donc : $f(0) = \ ke^{8\times 0} - \frac{5}{8} = k - \frac{5}{8} = 5$

Donc $k = 5 + \frac{5}{8} = \frac{45}{8}$

Donc :

$$f(x) = \frac{45}{8}e^{8x} - \frac{5}{8}$$

V/ Boite à outils.

Cette partie contient des outils mathématiques issus des chapitres précédents et dont la maîtrise est essentielle pour réussir les résolutions d'équations différentielles.

1) Simplifications avec e et ln.

On se souviendra des formules suivantes :

Formules :	Exemples :
$e^x \times e^y = e^{x+y}$	$e^x \times e^2 = e^{x+2}$
$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$	$\frac{1}{e^2} = e^{-2}$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\frac{e^x}{e^2} = e^{x-2}$
$(e^x)^y = e^{x \times y}$	$(e^x)^2 = e^{2x}$
$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$	
$e^0 = 1$	

- $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(a^b\right) = b \times \ln(a)$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$

2) Résoudre une équation ou inéquation avec e et ln.

Pour résoudre une équation avec e ou ln il suffit de suivre les étapes suivantes :

Etape 1 : *isoler e ou ln* ***Etape 2 :*** *appliquer ln ou e de chaque côté de l'égalité, puis simplifier* ***Etape 3 :*** *Finir la résolution*	$2- e^{x+3} = 0$ $2 = e^{x+3}$ $ln(2) = ln(e^{x+3})$ $ln(2) = x + 3$ $x = ln(2) - 3$	$2ln(x) – 1 = 1$ $2ln(x) = 2$ $ln(x) = 1$ $ln(x) = ln(e)$ $x = e$

VI/ Validation des exercices :

N° de l'exercice :	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
Validé le :							

A la fin de chaque exercice, appelez le professeur pour qu'il valide et remplisse votre tableau, vous pourrez alors passer à l'exercice suivant.

Les exercices sont disponibles en ligne sur géogébra.org :

Classroom code :