Lösung von linearen Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem ist ein System aus Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_2 + \ldots + a_n\cdot x_n &= a_0 \\ b_1\cdot x_1 + b_2\cdot x_2 + \ldots + b_n\cdot x_n &= b_0 \\ c_1\cdot x_1 + c_2\cdot x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n &= c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dabei sind alle a's, b's und c's konstante Zahlen.

Gesucht sind die Lösungen für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die ***alle*** Gleichungen ***gleichzeitig*** erfüllt sind.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x+5y-2z&=0 \\ -5x-12y+3z&=3 \\ x+4y+3z&=5 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $x=3$, $y=-1$ und $z=2$, probieren Sie es aus. So eine Lösung muss aber erst berechnet werden.

Lösungverfahren __Gauß'scher Algorithmus__

Die Lösung eines Gleichungssystems wird nicht verändert, wenn man

1. die gesamte Gleichungen mit einer beliebigen Zahl multipliziert
2. eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert oder von ihr abzieht
3. zwei Gleichungen miteinander vertauscht

Mit diesen drei Methoden kann jedes Gleichungssystem in eine **Dreiecksform** gebracht werden:

$$\begin{aligned} a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z &= d \\ e\cdot y+f\cdot z &= g \\ z &= i \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile lässt sich $z=i$ ablesen.
Diese Lösung für z wird in die **zweite** Zeile eingesetzt, um y zu berechnen.
z und y werden in die **erste** Zeile gesetzt, um die Lösung für x zu erhalten.

Um das Beispiel von oben zu lösen, geben wir den drei Gleichungen zuerst Namen: A, B und C:

$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B: & -5x & -12y & +3z = & 3 \\ C: & x & +4y & +3z = & 5 \end{array}$	Als ersten Schritt gilt es, die Gleichung B so umzuformen, dass das x verschwindet. Multipliziere Gleichung A mit 5 und Gleichung B mit 3 und addiere die dabei erhaltenen Gleichungen:
$\begin{array}{rrrrr} 5A: & 15x & +25y & -10z = & 0 \\ 3B: & -15x & -36y & +9z = & 9 \\ \hline B_1 = 5A+3B: & & -11y & -z = & 9 \end{array}$	Die Zeile B_1 ersetzt unsere alte Zeile B:
$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B_1: & & -11y & -z = & 9 \\ C: & x & +4y & +3z = & 5 \end{array}$	Nun muss das x aus Gleichung C verschwinden. Multipliziere Gleichung C mit (-3) und addiere das Ergebnis zu Gleichung A:
$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ 3C: & -3x & -12y & -9z = & -15 \\ \hline C_1 = A+3C: & & -7y & -11z = & -15 \end{array}$	Die Zeile C_1 ersetzt unsere alte Zeile C:
$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B_1: & & -11y & -z = & 9 \\ C_1: & & -7y & -11z = & -15 \end{array}$	Nun muss in Gleichung C_1 noch das y verschwinden. Gleichung A darf dabei nicht mehr verwendet werden. Multipliziere also Gleichung B_1 mit 7 und Gleichung C_1 mit (-11) und addiere wieder:
$\begin{array}{rrrr} 7B_1: & -77y & -7z = & 63 \\ (-11)C_1: & 77y & +121z = & 165 \\ \hline C_2 = 7B_1 - 11C_1: & & 114z = & 228 \end{array}$	Mit dieser neuen Gleichung für C_1 haben wir das gesuchte Dreieckssystem:
$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B_1: & & -11y & -z = & 9 \\ C_2: & & & 114z = & 228 \end{array}$	***Damit ist der schwerste Teil der Arbeit geschafft!***
Nun lässt sich mit Gleichung C_2 ganz einfach die Lösung für z berechnen:	$114z = 228 \quad \vert : 114 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{z=2}}$
Mit $z=2$ und Gleichung B_1 lässt sich nun die Lösung für y errechnen:	$-11y - 2 = 9 \;\vert +2 \;\Rightarrow -11y = 11 \;\vert\; : (-11) \Rightarrow \underline{\underline{y=-1}}$
Mit $z=2$ und $y=-1$ erhält man nun mit Gleichung A auch die letzte Lösung für x	$3x + 5\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 0 \;\Rightarrow 3x = 9 \;\vert\; : 3 \;\Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$

Für die Lösung des Gauß-Algorithmus gibt es zahllose Möglichkeiten. Mit ein wenig Kreativität kann man sich manchen Rechenschritt erleichtern. Im folgenden eine zweite Lösung in der man zwar etwas mehr zu schreiben hat, in der aber das Kopfrechnen leichter fällt:

$\begin{array}{rrrrr} A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B: & -5x & -12y & +3z = & 3 \\ C: & x & +4y & +3z = & 5 \end{array}$	Hier sortieren wir die Gleichungen so um, dass die Zeile mit den einfachsten Zahlen oben steht. Das muss nicht geschehen, vereinfacht aber die Rechnung
Erster „kreativer" Lösungsschritt: **Umsortieren**	
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ B: & -5x & -12y & +3z = & 3 \end{array}$	Als ersten Schritt gilt es, die Gleichung A so umzuformen, dass das x verschwindet. Multipliziere Gleichung C mit -3 und addiere das mit A
$\begin{array}{rrrrr} -3C: & -3x & -12y & -9z = & -15 \\ A: & 3x & +5y & -2z = & 0 \\ \hline A_1 = A - 3C: & & -7y & -11z = & -15 \end{array}$	Die Zeile A_1 ersetzt unsere alte Zeile A:
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A_1: & & -7y & -11z = & -15 \\ B: & -5x & -12y & +3z = & 3 \end{array}$	Nun muss das x aus Gleichung B verschwinden. Multipliziere Gleichung C mit 5 und addiere das Ergebnis zu Gleichung B:
$\begin{array}{rrrrr} 5C: & 5x & +20y & +15z = & 25 \\ B: & -5x & -12y & +3z = & 3 \\ \hline B_1 = B + 5C: & & 8y & +18z = & 28 \end{array}$	Die Zeile B_1 ersetzt unsere alte Zeile B:
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A_1: & & -7y & -11z = & -15 \\ B_1: & & 8y & +18z = & 28 \end{array}$	Nun muss in Gleichung B_1 noch das y verschwinden. Gleichung A darf dabei nicht mehr verwendet werden, sonst würde es in B_1 ja wieder die Variable x geben.
Zweiter „kreativer" Lösungsschritt: **Die Zahlen werden kleiner, wenn man A_1 durch $A_1 + B_1$ ersetzt**	
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A_2 = A_1 + B_1: & & y & +7z = & 13 \\ B_1: & & 8y & +18z = & 28 \end{array}$	Ziehe jetzt $8A_2$ von B_1 ab, dann entsteht das gesuchte Dreieckssystem:
Dritter „kreativer" Lösungsschritt: **Teile Gleichung B_1 durch 2, dann sind auch dort kleinere Zahlen**	
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A_2: & & y & +7z = & 13 \\ B_2 = B_1/2: & & 4y & +9z = & 14 \end{array}$	Nun ziehe $4A_2$ von B_2 ab:
$\begin{array}{rrrrr} C: & x & +4y & +3z = & 5 \\ A_2: & & y & +7z = & 13 \\ B_3 = B_2 - 4A_2: & & & -19z = & -38 \end{array}$	***Damit ist der schwerste Teil der Arbeit geschafft!***
Nun lässt sich mit Gleichung B_3 ganz einfach die Lösung für z berechnen:	$-19 = -38 \quad \vert : (-19) \qquad \Rightarrow \mathbf{z = 2}$
Mit $z = 2$ und Gleichung A_2 lässt sich die Lösung für y errechnen:	$y + 7 \cdot 2 = 13 \quad \vert - 14 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \mathbf{y = -1}$
Mit $z = 2$ und $y = -1$ erhält x aus Gleichung C	$x + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow x + 2 = 5 \vert \quad -2 \Rightarrow \mathbf{x = 3}$

Eine Kurzschreibweise

Das schlimmste am Gaußsystem ist, dass man so viel schreiben muss, der Papier-, Tinten- und vor allem Zeitverbrauch. Um dies abzumildern, gibt es eine Kurzschreibweise zur Lösung des Gauß-Algorithmus mit Hilfe von erweiterten Matrizen. Eine **erweiterte Matrix** besteht aus den Koeffizienten des linearen Gleichungssystems und aus den Ergebnissen, rechts vom Gleichheitszeichen:

Das Gleichungssystem $\begin{array}{rrrr} 3x & +5y & -2z = & 0 \\ -5x & -12y & +3z = & 3 \\ x & +4y & +3z = & 5 \end{array}$ wird dann zu: $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & -12 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)$

Es bleibt aber auch in dieser Schreibweise sinnvoll, die Gleichungen mit Namen zu versehen, so dass die rechnung leichter nachzuvollziehen ist. Die Rechenschritte auf der vorhergehenden Seite lauten in dieser Schreibweise so:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & -12 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} A_1 = C \\ B_1 = A \\ C_1 = B \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & -12 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A_2 = A_1 \\ B_2 = B_1 - 3A \\ C_2 = C_1 + 5A \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -11 & -15 \\ 0 & 8 & 18 & 28 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A_3 = A_2 \\ B_3 = B_2 + C_2 \\ C_3 = C_2/2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A_4 = A_3 \\ B_4 = B_3 \\ C_4 = C_3 - 4B_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -19 & -38 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, sich daran zu erinnern, dass die erweiterte Matrix nichts anderes als ein Gleichungssystem ist. Nun kann die Dreiecksmatrix wieder in das Gleichungssystem verwandelt werden:

$\begin{array}{lrrrr} A_4 & x & +4y & +3z = & 5 \\ B_4 & & y & +7z = & 13 \\ C_4 & & & -19z = & -38 \end{array}$ $\Rightarrow$ C_4: $\underline{\underline{z = 2}}$ damit in $B_4 : y + 7 \cdot 2 = 13$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = -1}}$

und mit Gleichung A_4: $x + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}}$