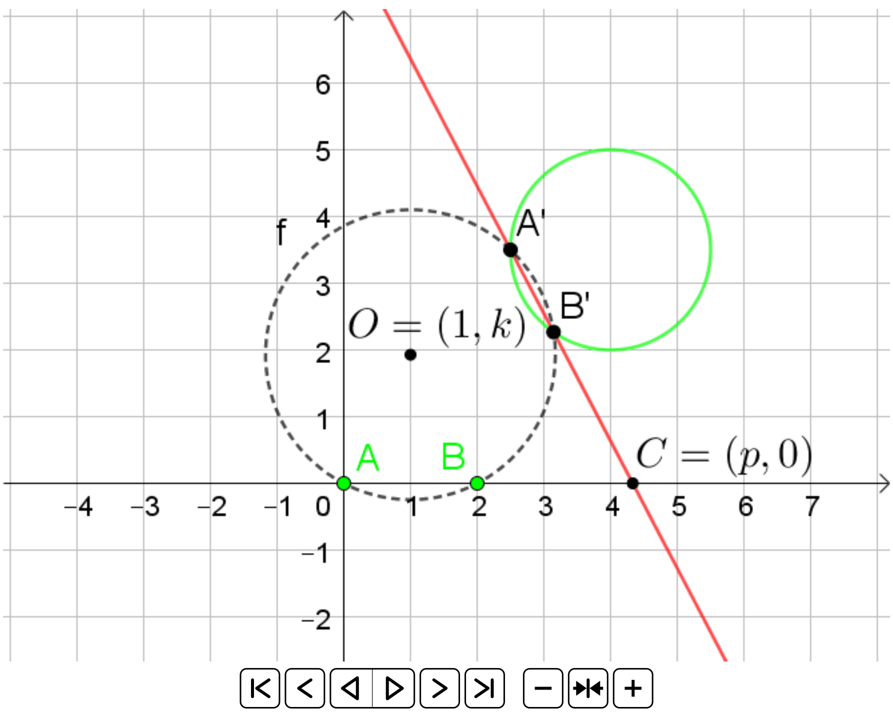
Demonstração

Aroldo Athias e Brenno Lages

20 de setembro de 2021

Tomemos dois pontos A e B e uma circunferência c que não passa por nenhum destes dois pontos e cujo centro não pertence a mediatriz do segmento AB. Considere ainda uma circunferência f qualquer da família de todas as circunferências que contêm os pontos A e B e intersectam c. Chamaremos de A' e B' os pontos de interseção entre c e f. No contexto desta demonstração, A, B e c serão objetos estáticos, enquanto f pode variar e, consequentemente, A' e B' também.

Desejamos provar que, nessas circunstâncias, o ponto C de interseção entre as retas AB e $A'B'$ é fixo, qualquer que seja a circunferência f dada.



Para isso, situemos nossos objetos em um sistema de coordenadas cartesianas e façamos, sem perda de generalidade, $A = (0, 0)$ e $B = (2, 0)$. Quanto a circunferência c, vamos considerar seu centro como sendo um ponto genérico (a, b) e seu raio um número real positivo r qualquer, de modo que sua equação reduzida será dada por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{1}$$

Nossa prova consistirá em mostrar que as coordenadas do ponto C são constantes. Na verdade, como o ponto C pertence a reta AB (que coincide com o eixo das abscissas pelas escolhas feitas para as coordenadas de A e de B), já temos a garantia de que a ordenada do ponto C é constante e igual a 0, isto é, $C = (p, 0)$. Resta demonstrar agora que p é também constante.

Note que o ponto C pertence também a reta $A'B'$ e corresponde justamente ao ponto em que esta reta intersecta o eixo das abscissas (reta AB). Logo, a equação segmentária de $A'B'$ deve ser da forma $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, em que p é precisamente a abscissa do ponto C.

Para mostrar que p é realmente constante vamos encontrar a equação segmentária da reta $A'B'$ a partir daqueles objetos que a definem, ou seja, os pontos A' e B'. Para isso, vamos recorrer justamente a definição destes pontos, isto é, os pontos de interseção entre as circunferências c e f. Isto significa que estes dois pontos devem satisfazer as equações destas duas circunferências. Já temos a equação de c. Vamos agora obter uma equação para f.

Como a circunferência f passa pelos pontos A e B, então seu centro O deverá estar localizado sobre a mediatriz do segmento AB. Como $A = (0, 0)$ e $B = (2, 0)$, essa mediatriz terá equação $x = 1$ e, portanto, o ponto O será da forma $O = (1, k)$, em que k é uma variável, já que a circunferência f não teria como passar por um ponto dado (neste caso dois pontos, A e B) e variar se seu centro O fosse constante. Assim, chamando de R o comprimento do raio OA da circunferência f, temos que sua equação é dada por $(x-1)^2 + (y-k)^2 = R^2$.

Uma vez que f passa por $(0, 0)$, este ponto deve satisfazer a equação desta circunferência. Deste modo, obtemos que $R^2 = k^2 + 1$.

Substituindo R^2 por $k^2 + 1$ na equação de f obtemos, após simples manipulações algébricas, a equação

$$x^2 + y^2 = 2x + 2ky, \tag{2}$$

que descreve a equação de qualquer circunferência que passa pelos pontos A e B.

Agora que temos uma equação para f, podemos montar um sistema de equações utilizando (1) e (2) para verificar como devem se relacionar as coordenadas x e y de qualquer ponto que pertença simultaneamente as circunferências c e f.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 & (1) \\ x^2+y^2=2x+2ky & (2) \end{cases}$$

A partir desse sistema, vamos agora tentar obter a equação segmentária da reta $A'B'$. Para isso, vamos inicialmente desenvolver a equação (1), obtendo

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=r^2. \tag{3}$$

Note que os dois primeiros termos de (3) correspondem justamente ao primeiro membro de (2). Substituindo-os pelo que aparece no segundo membro de (2) e deixando no primeiro membro de (3) apenas os termos nos quais aparecem as variáveis x e y obtemos

$$2x-2ax+2ky-2by=r^2-(a^2+b^2). \tag{4}$$

Com o intuito de fazer com que a equação (4) adquira o aspecto da equação segmentária de uma reta vamos colocar x e y em evidência e dividi-la por $r^2-(a^2+b^2)$ (que é diferente de zero, pois se $r^2=a^2+b^2$ teríamos $A \in c$), a fim de que o seu segundo membro torne-se igual a 1. Desse modo obtemos

$$\frac{2-2a}{r^2-(a^2+b^2)}\,x+\frac{2k-2b}{r^2-(a^2+b^2)}\,y=1. \tag{5}$$

Para assumir a forma de uma equação segmentária, basta então que os coeficientes de x e de y na (5) sejam levados para os denominadores. Fazendo isso chegamos a

$$\frac{x}{\dfrac{r^2-(a^2+b^2)}{2-2a}}+\frac{y}{\dfrac{r^2-(a^2+b^2)}{2k-2b}}=1. \tag{6}$$

Note que $2-2a\neq 0$, ou então $a=1$ e o centro de f pertenceria a mediatriz de AB.

A equação (6) nos revela então como devem se relacionar as coordenadas x e y dos pontos A' e B' para que estes possam, de fato, ser os pontos de interseção entre c e f. Como dois pontos definem uma reta, isso significa que qualquer reta que passe por estes dois pontos deve ter equação segmentária definida por (6). Agora basta observar que a, b e r são constantes para concluir que, como

$$p = \frac{r^2 - (a^2 + b^2)}{2 - 2a}, \tag{7}$$

então p é constante.

Note ainda que k varia apenas em função da circunferência f escolhida. Além disso, quando $2k - 2b = 0$ temos, pela equação (5), a equação de uma reta vertical e chegaríamos novamente no resultado da equação (7), visto que, nesse caso, x é constante.

Isto conclui a prova.