Gráfica de Funciones.

Cuando tanto el dominio como el codominio de una función son conjuntos de números reales, podemos describir la función haciendo un dibujo de su gráfica en un plano coordenado.

Para ello seguiremos los pasos:

1. **Obtener las coordenadas de algunos puntos que están en el dominio de la función.**
2. **Ubicar estos puntos en el plano.**
3. **Conectar los puntos con una curva suave.**

Clasificación de Funciones

Las funciones se clasifican en dos grandes grupos: funciones algebraicas y funciones transcendentes

A. Funciones Algebraicas

- Funciones Polinomiales
- Funciones Racionales
- Funciones Raíz de un Polinomio
- Función Valor Absoluto

B. Funciones Transcendentes

- Funciones Trigonométricas y sus inversas
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas
- Funciones Hiperbólicas y sus inversas

A. Funciones Algebraicas

Las funciones algebraicas son aquellas que pueden expresarse como una suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación de expresiones algebraicas.

Funciones Polinomiales:

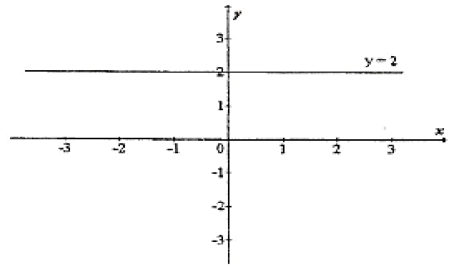
Son las funciones definidas por un polinomio de grado n, de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$, donde los coeficientes $a_n, \ldots, a_0$ son números reales y $n \varepsilon Z^+ \cup \{0\}$.

Función Constante:

Es una función polinomial de grado cero de la forma: $f(x) = a_0$, donde a_0 es una constante.
El dominio de la función constante es el conjunto de los números reales y el codominio es a_0.
La gráfica de la función constante es una línea recta paralela al eje x, y corta al eje y en $y = a_0$.

Ejemplo:
$f(x) = 2$

$D : \Re$
$C : \{2\}$



Función lineal:

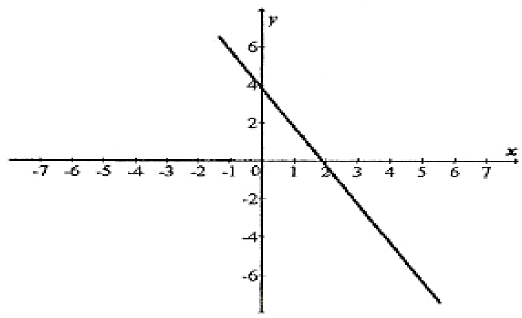
La función lineal (función polinomial de primer grado) es de la forma $f(x) = a_1 x + a_0$. El dominio y codominio es el conjunto de todos los números reales.
La gráfica de una función lineal es una línea recta. La a_1 representa la pendiente de la recta y a_0 el intercepto con el eje y (u ordenada en el origen).

Dadas las siguientes funciones, obtener el dominio, codominio y construir su gráfica.

1) $f(x) = -2x + 4$

Solución:
$D : \Re$
$C : \Re$

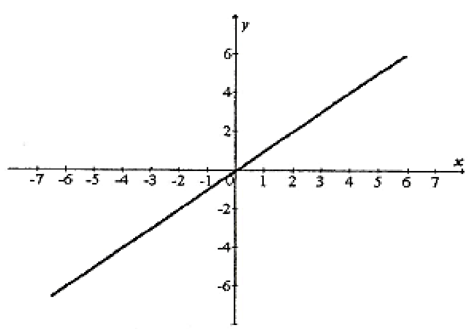
x	0	2
y	4	0



Función Idéntica o Función Identidad:

La función idéntica es una función lineal con $a_1 = 1$ y $a_0 = 0$; y se define por: $f(x) = x$ ó $y = x$.
El dominio y el codominio de la función identidad es el conjunto de los números reales.

x	-2	0	-2
y	-2	0	2



Función Cuadrática:

Es una función polinomial de grado dos que se puede expresar de la forma $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ con $a_2 \neq 0$. Generalmente se utiliza la forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

La gráfica de una función cuadrática es una parábola vertical y su dominio es el conjunto de los números reales.

La abscisa del vértice de la parábola corresponde a: $x=-\frac{b}{2a}$.

La ordenada se obtiene valorando la función con el valor de la abscisa: $y=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

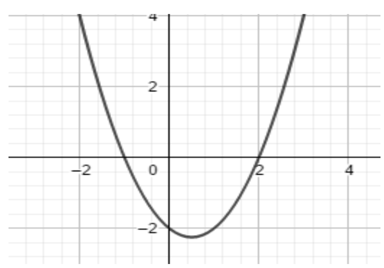
Si a >0, la parábola abre hacia arriba y el codominio será: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),+\infty\right)$.

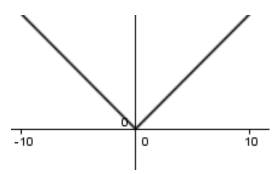
Si a < 0, la parábola abre hacia abajo y el codominio será: $\left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$

Por ejemplo: Determine dominio y codominio y haga un esboce gráfico de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x)=x^2-x-2}$.

$D_f = R$

$C_f = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$





Función Valor Absoluto.

Definida como $f(x)=|x|=\begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{si\ x < 0} \end{cases}$

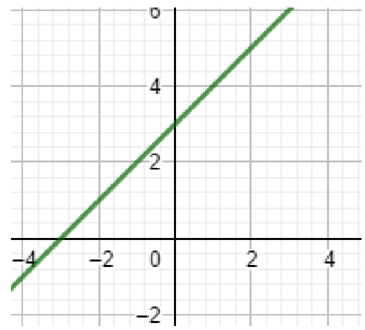
Su gráfica es la unión de dos semirectas que parten del origen. Su dominio es R y su codominio $[\boldsymbol{0}, \infty)$

Función Racional.

Es un cociente de dos polinomios, por tanto, Q es racional si para cada x en su dominio $Q(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$.

Por ejemplo. Determine dominio, codomino y grafique las funciones:

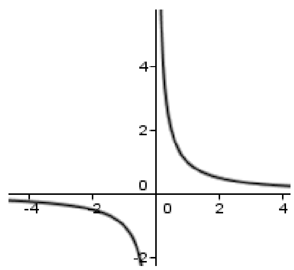
a) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$



$D_f = R - \{2\}$

$D_f = R - \{5\}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$



$D_f = R - \{0\}$

$D_f = R - \{0\}$

Función Raíz de un Polinomio

Las funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)};$$

donde $p(x)$ es un polinomio y n representa un número natural $(n \geq 2)$, se conocen como raíz de un polinomio.

Al estudiar el dominio de este tipo de funciones debemos tener en cuenta los siguientes casos:

1) Si n es par, debemos encontrar el dominio resolviendo la desigualdad $P(x) \geq 0$.
2) Si n es impar, el dominio estará compuesto por el conjunto de los números reales.

Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, determine su dominio, codominio y trace la gráfica.

Solución:

Para determinar el dominio de f debemos resolver la desigualdad

$$x^2 - 16 \geq 0, \text{ es decir}$$

$$(x-4)(x+4) \geq 0,$$

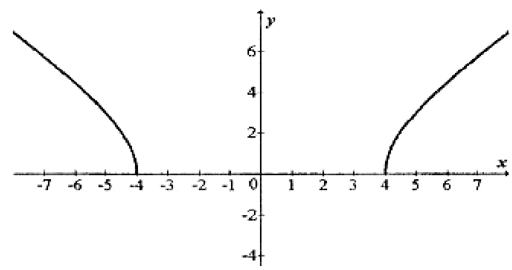
así los números críticos son: $x=-4$ y $x=4$, por lo tanto:

Intervalo	x - 4	x + 4	(x - 4) (x + 4)
$(-\infty,-4]$	-	-	+
$[-4,4]$	-	+	-
$[4,\infty)$	+	+	+

el dominio de esta función es $(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$.

Su gráfica se muestra a continuación, y su codominio es el intervalo $[0,\infty)$.

x	-6	-5	-4	4	5	6
y	$2\sqrt{5}$	3	0	0	3	$2\sqrt{5}$



Función Definida por Intervalos

Como hemos visto con la función valor absoluto, las funciones pueden estar definidas por más de una sola ecuación, este tipo de funciones son conocidas como funciones definidas por intervalo. El dominio de estas funciones se obtiene por la unión de los diferentes dominios de cada ecuación y su codominio a partir de la gráfica.

A esta función también se le conoce como: función definida por tramos, función definida a trozos o función seccionada, entre otros.

Sea $f(x)=\begin{cases}2x+1, & si\ x<0\\ 2x+2, & si\ 0\le x\end{cases}$, determine su dominio, codominio y su gráfica.

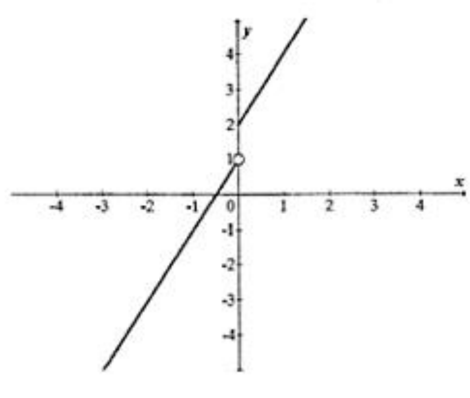
Solución:
Al unir los dominios de cada ecuación se obtiene que el dominio de f es el conjunto de los números reales. Veamos su gráfica:

Para $2x+1$

x	0	-1
y	1	-1

Para $2x+2$

x	0	1
y	2	4



Como se puede observar de la gráfica de esta función el codominio es $(-\infty,1)\cup[2,\infty)$.