Teoría – Tema 5

Teoría - 13 - Sistema generador

Sistema generador

Un conjunto de vectores se dice que es un **sistema generador** de los vectores del espacio vectorial al que pertenecen, si cualquier vector de dicho espacio puede expresarse como combinación lineal de ese conjunto de vectores.

En dos dimensiones, diremos que el conjunto formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son un sistema generador en V^2 si para cualquier vector $\vec{u}=(x,y)\in V^2$ se cumple:

$$(x,y)=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}$$

En tres dimensiones, diremos que el conjunto formado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$ son un sistema generador en V^3 si para cualquier vector $\vec{u}=(x,y,z)\in V^3$ se cumple:

$$(x,y,z)=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}+\gamma\cdot\vec{t}$$

En general, para un sistema generador en V^n necesitaremos al menos n-vectores.

Es decir: En dos dimensiones, los sistemas generadores están formados por al menos dos vectores. En tres dimensiones, los sistemas generadores están formados por al menos tres vectores. Y así sucesivamente.

Para poder expresar cualquier vector arbitrario, **un sistema generador cumple que su rango debe ser igual a la dimensión del espacio vectorial**.

Si el conjunto de vectores tiene un rango inferior a la dimensión del espacio vectorial, sabremos seguro que jamás podrá ser sistema generador.

Ejemplo 1 resuelto

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ un sistema generador en V^2 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x,y)=\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3) \quad\rightarrow\quad (x,y)=(\alpha+2\cdot\beta,\alpha-3\cdot\beta)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{Bmatrix} x=\alpha+2\cdot\beta \\ y=\alpha-3\cdot\beta \end{Bmatrix}$$

Si restamos ambas ecuaciones podemos obtener el valor del parámetro β en función de x , y .

$$x-y=5\cdot\beta \quad \rightarrow \quad \beta=\frac{x-y}{5}$$

Y el valor de α resulta:

$$x=\alpha+2\cdot\frac{x-y}{5} \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{3x+2y}{5}$$

Es decir, dado un vector arbitrario $\vec{u}=(x,y)$ siempre podemos expresarlo en función del sistema generador $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ a partir de los valores de α y β .

Si estudias el rango de los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$, verás que el rango es igual a 2.

Ejemplo 2 resuelto

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ un sistema generador en V^3 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x,y,z)=\alpha\cdot(1,1,0)+\beta\cdot(2,-3,0)+\gamma(-1,4,0) \quad \rightarrow \quad (x,y,z)=(\alpha+2\cdot\beta-\gamma,\alpha-3\cdot\beta+4\cdot\gamma,0)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\left\{\begin{array}{c} x=\alpha+2\cdot\beta-\gamma \\ y=\alpha-3\cdot\beta+4\cdot\gamma \\ z=0 \end{array}\right\}$$

Si expresamos matricialmente el sistema (recordamos que las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 1 & -3 & 4 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

La última fila muestra una incongruencia: $0=z$. ¿Por qué es una incongruencia? Porque estamos trabajando con un vector arbitrario $\vec{u}=(x,y,z)$, y lógicamente z puede tomar cualquier valor... no solo el valor 0 .

Por lo tanto, debido a esta incongruencia o absurdo matemático, nuestro sistema no tiene solución. Es decir, los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ no forman un sistema generador en V^3 .

Si calculas su rango, verás que el rango vale 2. Y como estamos con vectores de dimensión 3, no tendremos sistema generador por ser el rango inferior a la dimensión del espacio vectorial.