Teoría – Tema 9

Teoría - 1 - velocidad media y tasa de variación media TVM

Un ejemplo: velocidad media y velocidad instantánea

Pensemos en un objeto que se desplaza en el tiempo, según una función *e(t)* llamada espacio recorrido. Este desplazamiento es lineal, es decir, en una sola dimensión. La variable independiente es el tiempo *t* medido en segundos. La variable dependiente *e(t)* se mide en metros.

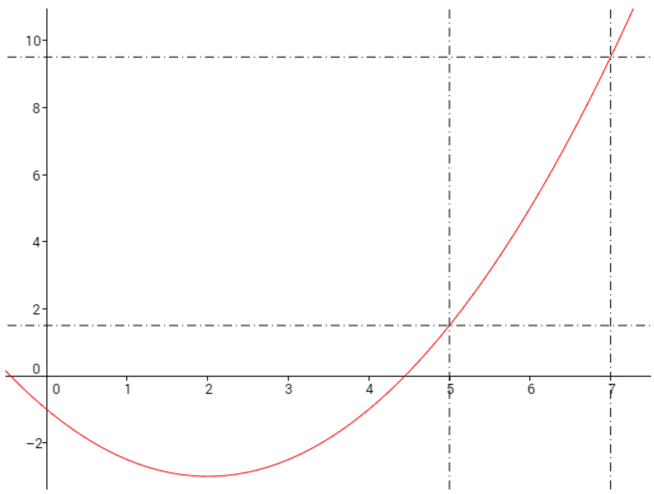
Imaginemos que en un tiempo inicial $t_0=5\ s$ el objeto se encuentra en la posición $e_0=\frac{3}{2}\ m$.

Supongamos también que el espacio recorrido se rige por la expresión analítica $e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$. ¿En qué posición se encontrará en un tiempo final $t_f=7\ s$?

Aplicando la función para $t_f=7\ s$ es fácil obtener $e(7)=\frac{7^2}{2}-2\cdot 7-1 \rightarrow e_f=\frac{19}{2}\ m$.

Podemos representar gráficamente este desplazamiento para todo tiempo.

------- $e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$



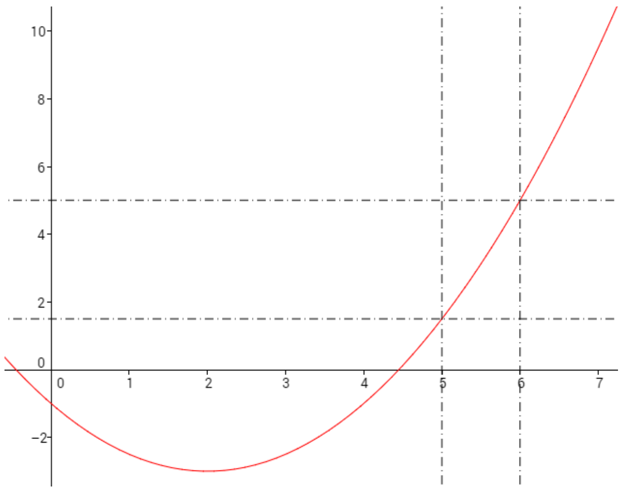
Sabemos que la velocidad se define como la variación del espacio en un intervalo de tiempo. En el intervalo $[5\,s, 7\,s]$ podemos calcular la **velocidad media**:

$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \rightarrow v_{media}=\frac{\frac{19}{2}-\frac{3}{2}}{7-5}=\frac{16}{4}=4\ m/s$$

¿Significa este valor de *4 m/s* que siempre ha viajado a esa velocidad? No, es una **estimación media**. Si en *2 segundos* (la diferencia entre *7 s* y *5 s*) ha recorrido 8 metros (la diferencia entre $19/2$ metros y $3/2$ metros), la velocidad media nos dice que “en términos medios” cada segundo implica un avance de *4 metros*.

Cambiemos ahora el tiempo final y consideremos $t_f=6\ s$. El espacio final será $e(6)=\frac{6^2}{2}-2\cdot 6-1$ $\rightarrow e_f=5\ m$.

$e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$

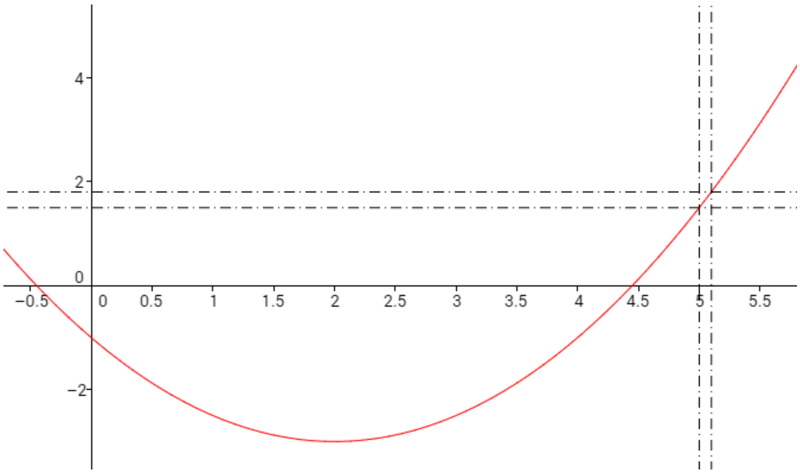


$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \rightarrow v_{media}=\frac{5-\frac{3}{2}}{6-5}=\frac{7}{2}\ m/s$$

Para el nuevo intervalo $[5s, 6s]$ la velocidad media ha cambiado respecto al intervalo anterior. Ahora su valor es $7/2\ m/s$.

Cambiemos nuevamente el tiempo final y consideremos $t_f=5{,}1\ s$. El espacio final será $e(5{,}1)=\frac{(5{,}1)^2}{2}-2\cdot(5{,}1)-1 \rightarrow e_f=1{,}805\ m$.

$e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$



$$v_{media}=\frac{espacio_{final}-espacio_{inicial}}{tiempo_{final}-tiempo_{inicial}}=\frac{e_f-e_0}{t_f-t_0} \rightarrow v_{media}=\frac{1,805-\frac{3}{2}}{5,1-5}=\frac{0,305}{0,1}=3,05\ m/s$$

Para el nuevo intervalo $[5s, 5.1s]$ la velocidad media ha cambiado. Ahora su valor es $3,05\ m/s$.

Podemos iterar este proceso tantas veces como queramos, tomando tiempos finales t_f cada vez más cercanos al tiempo inicial $t_0=5\ s$. Cuanto menor sea la diferencia t_f-t_0 más nos acercaremos al concepto de **velocidad instantánea** para el tiempo $t_0=5\ s$.

En el caso ideal $t_f-t_0\rightarrow 0$ podemos definir la velocidad instantánea de nuestro objeto en $t_0=5\ s$ con la expresión:

$$\begin{array}{r} t_0=5 \\ t_f=5+h \\ t_f-t_0=h>0 \end{array} \rightarrow v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{5+h-5}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{h}$$

Si desarrollamos la expresión de la función *e(t)* para los valores *e(5+h)* y *e(h)* tendremos:

$$v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{(5+h)^2}{2}-2(5+h)-1-[\frac{5^2}{2}-2(5)-1]}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{h^2}{2}+\frac{10h}{2}-2h}{h}$$

$$v_{instantánea}(t=5)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{h^2}{2}+3h}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{h}{2}+3 \rightarrow v_{instantánea}(t=5)=3\ m/s$$

Este valor de *3 m/s* sí nos da una idea exacta de la **velocidad de nuestro objeto para un instante concreto** (en nuestro caso, para el tiempo t = 5 s).

Si deseamos obtener la **expresión analítica *v(t)* válida para cualquier tiempo del desplazamiento**, podemos definir la función velocidad instantánea *v(t)* como la derivada del espacio *e(t)* en función del tiempo *t*.

$$v(t=5)=\lim_{h\to 0}\frac{e(t+h)-e(t)}{t+h-t}$$

Para nuestro ejemplo concreto $e(t)=\frac{t^2}{2}-2t-1$ tendremos:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(t+h)^2}{2}-2(t+h)-1-[\frac{t^2}{2}-2(t)-1]}{h}$$

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2}+\frac{2\cdot t\cdot h}{2}-2\mathrm{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}+t-2 \;\rightarrow\; v(t)=t-2$$

Es decir, la función $v(t)=t-2$ nos da la velocidad instantánea para cualquier tiempo por ser la derivada de la función *e(t)*. Y podemos usar notación de derivadas.

$$e'(t)=v(t) \;\leftrightarrow\; \frac{d[e(t)]}{dt}=v(t)$$