

Annisa Zastriane P_23030130096

Nama: Annisa Zastriane Puspaningrum
NIM: 23030130096
Kelas: Pendidikan Matematika D 2023

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r  
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"  
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d  
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d  
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"  
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi  
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri  
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan  
normalize(v): normal vektor v  
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.  
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

$ax+by=c$.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v  
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g  
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g  
getPointOnLine(g): titik pada garis g  
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g  
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g  
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h  
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g  
distance(A, B): jarak titik A dan B  
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B  
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B  
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC  
computeAngle(A, B, C): besar sudut  $\angle ABC$   
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut  $\angle ABC$   
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r  
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c  
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c  
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C  
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB  
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c  
circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2  
planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y  
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada

sisi positif (kanan/atas) garis

quad(A,B): kuadrat jarak AB

spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni $\sin(\alpha)^2$ dengan α sudut yang menghadap sisi a.

crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.

triplespread(sa, sb, sc): persamaan 3 spread sa, sb, sc yang membentuk suatu segitiga

doublespread(sa): Spread sudut rangkap 2ϕ , dengan $sa=\sin(\phi)^2$ spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan tiga titik dan plotkan

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");C=[2,2];
```

```
Space between commands expected!
Found: C=[2,2]; (character 67)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
C=[2,2]; plotPoint(C,"C");C=[2,2]; ...
      ^
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah $[a,b,c]$, yang merepresentasikan garis dengan persamaan $ax+by=c$.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.


```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

dan persinggungannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plotkan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Hitung luas ABC:

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```


Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```


```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

JAWABAN

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>s=lineThrough(B,C)
```

```
[-1, 2, 2]
```

```
>m=circleWithCenter(P,r)
```

```
[0.86038, 0.86038, 0.509654]
```

```
>S=lineCircleIntersections(s,m)
```

```
[0.632456, 1.31623]
```

Titik Singgung garis AC dengan lingkaran dalam

```
>p=lineThrough(A,C)
```

```
[-2, 1, -2]
```

```
>Q=lineCircleIntersections(p,m)
```

```
[1.31623, 0.632456]
```

Titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam.

```
>q=lineThrough(A,B)
```

```
[-1, -1, -1]
```


```
>L=lineCircleIntersections(q,m)
```

```
[0.5, 0.5]
```

Jadi titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga adalah (2, 1), (1,-1),(-1, 2).

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(S,Q,"a");  
>plotSegment(S,L,"b");  
>plotSegment(L,Q,"c"):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam


```
>P, r
```

```
[0.86038, 0.86038]  
0.509653732104
```

```
>k=angleBisector(A,B,C)
```


```
[-0.264911, -1.63246, -1.63246]
```

```
>color(2); plotLine(k):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>plotSegment(P,L,"r"):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan kombinasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis



```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```



```
>function f(x)
endfunction
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.


```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui (x1, y1)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```


```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
2 6
[-, -]
5 5
```


```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

 Annisa Zastriane P_23030130096



```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096


```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi s
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038, 0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.


```
>A := [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);  
>B := [1,2]; C := [2,1]; l=lineThrough(B,C);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);  
>P1, P2, f
```

```
[4.64575, -1.64575]  
[-0.645751, 3.64575]  
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Hal yang sama pada Maxima.


```
>c := circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l := lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];  
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));  
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);  
>l=lineThrough(P1,P2);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A := [a1,a2]; B := [b1,b2];
>c1 := circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 := circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P := circleCircleIntersections(c1,c2); P1 := P[1]; P2 := P[2];
```


Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g := getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.


```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>h :=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

 Annisa Zastriane P_23030130096


Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron


Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

 Annisa Zastriane P_23030130096


atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

 Annisa Zastriane P_23030130096


Untuk membuktikan hal ini kita misalkan $C(0,0)$, $B(a,0)$ dan $A(x,y)$, $b=AC$, $c=AB$. Luas segitiga ABC adalah

 Annisa Zastriane P_23030130096

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...
  plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0], "t=y",25);
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>&assume(a>0); sol := solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x,y])
```

[]

Ekstrak solusi y.


```
>ysol := y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```


```
Error in:
ysol := y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
^
```

Kita mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
H:  
  useglobal; return a*abs(ysol)/2  
Error in:  
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...  
  ^
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga dengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```

```
Variable or function ysol not found.  
Error in expression: 3*abs(ysol)/2  
%ploteval:  
  y0=f$(x[1],args());  
adaptiveevalone:  
  s=%ploteval(g$,t,args());  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
plot2d:  
  dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args();
```

Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:  
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]  
  -- an error. To debug this try: debugmode(true);  
  
Error in:  
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...  
  ^
```


Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana $b+c=d$ untuk suatu konstanta d . Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.


```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:  
part: invalid index of list or matrix.  
  -- an error. To debug this try: debugmode(true);  
  
Error in:  
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...  
  ^
```

Dan buatlah fungsi-fungsi dari hal ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


 Annisa Zastriane P_23030130096

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

 Annisa Zastriane P_23030130096


di mana (x_m, y_m) adalah pusat, dan u serta v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk $x=0$. Dengan demikian, luas segitiga dengan $a+b+c=d$ adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi $a = b = c = d/3$.

```
>$solve(eqns, [a,b])
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan $H(a,b,c)^2$ sehubungan dengan $a+b+c=d$.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=1a,diff(H(a,b,c)^2,b)=1a, ...  
diff(H(a,b,c)^2,c)=1a,a+b+c=d],[a,b,c,1a])
```

```
Maxima said:  
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);  
  
Error in:  
... 1a, diff(H(a,b,c)^2,c)=1a,a+b+c=d],[a,b,c,1a]) ...  
^
```


Kita bisa membuat plot situasi.

pertama-tama tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:  
part: invalid index of list or matrix.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);  
  
Error in:  
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...  
^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kemudian, tetapkan kisaran plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...  
a=4; b=3; c=2; ...  
plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...  
plotPoint(mxmeval("A"),"A");  
  
Variable a1 not found!  
Use global variables or parameters for string evaluation.  
Error in Evaluate, superfluous characters found.  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
mxmeval:  
return evaluate(mxm(s));  
Error in:  
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...  
^
```

Plot segmen-segmen tersebut.

```

>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):

Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
  return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
^

```

Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.


```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah keliling.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```

>plotPoint(U()); ...
plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):


```

```

Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
^


```

Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

 Annisa Zastriane P_23030130096

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah hal ini benar dengan Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.


```
>A:=[-1,-1]; B:=[2,0]; C:=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```


Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```



Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```


 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan rumus berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...  
perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>e1 &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(e1,x,y)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(e1(),"Garis Euler"):
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(e1,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Teori mengatakan bahwa $MH = 2 \cdot MO$. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance (M, H) /distance (M, O) |radcan
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.


```
>$computeAngle (A, C, B), degprint (%)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
60°15'18.43''
```


Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection (angleBisector (A, C, B), angleBisector (C, B, A)) |radcan; $Q
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.


```
>r &= distance (Q, projectToLine (Q, lineThrough (A, B))) |ratsimp; $r
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>LD &= circleWithCenter (Q, r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.


```
>color (5); plotCircle (LD());
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm (lineThrough (A, B), x, y, C) -distance ([x, y], C); $p='0
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>$p='0$p='0plot2d (p, level=0, add=1, contourcolor=6):
```

```
Maxima said:  
incorrect syntax: plot2d is not an infix operator  
p='0plot2d(  
^
```


```
Error in:  
$p='0$p='0plot2d (p, level=0, add=1, contourcolor=6): ...  
^
```

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya bisa menemukan solusinya jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve (getHesseForm (lineThrough (A, B), x, y, C) ^2 -distance ([x, y], C) ^2, y)
```


```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,  
y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah


 Annisa Zastriane P_23030130096

Menambahkan solusi pertama ke dalam plot menunjukkan, bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa itu adalah parabola yang diputar.



```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

 Annisa Zastriane P_23030130096



```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut  
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari sebuah ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Ilahi", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".


Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Max-ima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yang komputasinya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolis sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan perkiraan numerik saja.


```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...  
setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
insimg(30);
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Tentu saja,

 Annisa Zastriane P_23030130096

di mana α adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini, a , b , dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.


Teorema Pythagoras menjadi $a+b=c$. Maka, teorema Pythagoras menjadi $a+b=c$.

```
>a := 3^2; b := 4^2; c := 5^2; a+b=c
```

25 = 25


Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

 Annisa Zastriane P_23030130096

di mana a dan c adalah kuadrat dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

```
>sa := a/c; $sa
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut ke radian, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

9/25


Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan ke dalam "hukum silang" berikut ini.

 Annisa Zastriane P_23030130096

Di sini, a, b, dan c adalah kuadrat dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.


Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kita muat ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Dalam kasus kami, kami mendapatkan


```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadrat a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasil yang sudah kami dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.


Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga dengan kuadrat ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi.

 Annisa Zastriane P_23030130096

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```


```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih lanjut.


Kami menetapkan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
setPlotRange(-1,5,1,7); ...
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.


```
>$distance(A,B)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096


Euler juga memiliki fungsi untuk kuadranan antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena $c+b$ bukan a , maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi `computeAngle` menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.


```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a , b , dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x .


```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096


Itulah yang dilakukan oleh fungsi `spread` yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku $\sin(\arccos(\cdot))$ menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

 Annisa Zastriane P_23030130096

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Gambar berikut ini dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png


Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt (ha)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt (ha) *sqrt (a) /2
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle (B,A,C)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Formula Heron


Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue (a,b,c, sb, ha) ;
```

Pertama-tama kita menghitung luas di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread (b^2,c^2,a^2), $factor (%*c^2*a^2/4)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096


Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut seperti. Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut ini.


```
>&remvalue (sa, sb, sc) ; $triplespread (sa, sb, sc)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

 Annisa Zastriane P_23030130096

Karena spread dari

 Annisa Zastriane P_23030130096

sama, aturan triple spread juga benar, jika


 Annisa Zastriane P_23030130096

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

 Annisa Zastriane P_23030130096


Contohnya, kita bisa menghitung penyebaran sudut 60°. Hasilnya adalah 3/4. Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.



```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Penyebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke 90° , penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan $a + b = 1$.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

Karena penyebaran 180° -t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi, kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

- 4 (a - 1) a

Garis Bagi Sudut

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...  
setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.


```
>&remvalue(a,b,c);
```


Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, dengan menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut yang dibagi dua 180° -wa

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

 Annisa Zastriane P_23030130096

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```


18°26'5.82''

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

[0, 1.33333]

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```


```
0.321750554397  
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

 Annisa Zastriane P_23030130096


berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

 Annisa Zastriane P_23030130096

di mana a , b , c menunjukkan qudrah.

Karena spread CPA adalah $1-sa^2$, kita bisa mendapatkan $bisa/1 = b/(1-sa^2)$ dan bisa menghitung bisa (kuadran dari sudut pembagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>function f(x)  
endfunction
```


Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])"), distance(A,P))
```

```
4.21637021356  
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.


```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akor

Lihatlah situasi berikut ini.


```
>setPlotRange(1.2); ...  
color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...  
A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...  
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...  
plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...  
insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga kali lipat untuk sudut-sudut di pusat O untuk r . Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```


Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1


Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Pada kenyataannya, penyebarannya adalah $b/(4r)$, dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Komentar Awal


Fungsi pada sebuah titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
title="If you see ellipses, please set your window square"):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Tentu saja, nilai minimum 0 diperoleh di A.

Dua Titik


Sekarang kita lihat fungsi $MA+MB$ di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang terkenal" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)", xmin=-3, xmax=3) :
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Tiga Titik

Sekarang, masalahnya menjadi lebih sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa $MA+MB+MC$ mencapai titik minimum pada satu titik bidang, tetapi untuk menentukannya tidak sesederhana itu:


1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3", xmin=-5, xmax=3, ymin=-4, ymax=4);
>insimg;
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>fcontour("d3", xmin=-4, xmax=1, ymin=-2, ymax=2, hue=1, title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1], P[2], add=1, color=12);
>insimg;
```


 Annisa Zastriane P_23030130096

2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120° , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3", xmin=-2, xmax=2, ymin=-2, ymax=2) :
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>fcontour("d3", xmin=-2, xmax=2, ymin=-2, ymax=2, hue=1, title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1], P[2], add=1, color=12);
>insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096


Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para ahli dilet lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak pendapatan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga $FA+FB+FC$ minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Tradisi yang berlaku adalah mencatat titik F ini...


Empat Titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimumkan $MA+MB+MC+MD$; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4", xmin=-1.5, xmax=1.5, ymin=-1.5, ymax=1.5) :
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>fcontour("d4", xmin=-1.5, xmax=1.5, ymin=-1.5, ymax=1.5, hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1], P[2], points=1, add=1, color=12);
>insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Masih ada nilai minimum dan tidak ada simpul A, B, C, maupun D:


```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f", [0.2,0.2])
```

```
[0.142858, 0.142857]
```


Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

ABCD adalah sebuah bujur sangkar, kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

```
>C=[-1,1];  
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);  
>insimg;
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe pada jalur program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```


Kemudianm baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);  
>color(black); plotLine(g(),"")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color (red);  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]), "");  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]), "");  
>insimg;
```

Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama, kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;  
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan pemandangan dengan tepat.

```
>povstart (zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bola ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));  
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();  
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");  
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];  
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]  
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);  
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));  
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);  
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian, kita menghasilkan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pcl=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pcl],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pcl=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pcl],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk mengapresiasi efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

 Annisa Zastriane P_23030130096

Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file "spheri-cal.e" di dalam folder contoh. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan `sposprint` (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];  
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''  
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang ...  
^
```

Ada fungsi untuk judul, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(
```

```
180°0'10.77''
```

Ini bisa digunakan untuk menghitung luas area segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam `asum-pi`.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...  
^
```


Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];  
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...  
^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun demikian, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita melenceng jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita sesuaikan pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°  
81.67°  
83.71°  
85.78°  
87.89°  
90.00°  
92.12°  
94.22°  
96.29°  
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti judul yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...  
loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;  
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran HI menuju Monas dengan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...  
loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 7°37.422' E 110°0.573'  
S 7°27.829' E 109°39.196'  
S 7°18.219' E 109°17.834'  
S 7°8.592' E 108°56.488'  
S 6°58.948' E 108°35.157'  
S 6°49.289' E 108°13.841'  
S 6°39.614' E 107°52.539'
```

```
S 6°29.924' E 107°31.251'  
S 6°20.219' E 107°9.977'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang memetakan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...  
  useglobal;  
  plotearth;  
  plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");  
  plotposline(v);  
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,>own,>user,zoom=4):
```

Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```

Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah $(360/n)$.
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan $(360/n)$.
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya $y = ax^2 + bx + c$.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>O := [0,0]; z=circleWithCenter(O,5);
```

JAWABAN

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah $(360/n)$.
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan $(360/n)$.
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

```
>color(1); setPlotRange(5); plotPoint(o); plotCircle(c);
```

```
Variable or function o not found.  
Error in:  
color(1); setPlotRange(5); plotPoint(o); plotCircle(c); ...  
^
```

```

>A=[-5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,"");
>z1=circleWithCenter(A,distance(A,O));
>z2=circleWithCenter(B,distance(B,O));
>f=circleCircleIntersections(z1,z);
>g=circleCircleIntersections(z,z2);
>h=circleCircleIntersections(z2,z);
>i=circleCircleIntersections(z,z1);
>r=lineThrough(f,h); s=lineThrough(g,i);
>setPlotRange(8); plotPoint(O); plotCircle(z); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotSegment(A,B,"")
>color(4); plotCircle(z1); plotCircle(z2); plotPoint(f); plotPoint(g); plotPoint(h); plotPoint(i);
>color(5); plotLine(r); plotLine(s);
>color(100); plotSegment(A,f,""); plotSegment(A,i,""); plotSegment(f,g,""); ...
>plotSegment(g,B,""); plotSegment(B,h,""); plotSegment(h,i,"");

```

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya $y = ax^2 + bx + c$.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c .

```

>setPlotRange(5); D=[1,0]; E=[4,0]; F=[0,-4];
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F");
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])

```

[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]

```

>function y&=-x^2+2*x-25

```

$$-x^2 + 2x - 25$$

```

>plot2d("-x^2+2*x-25",-25,50,-50,25):

```

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```

>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>A=[-2,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,-2]; plotPoint(C,"C");
>D=[-2,-2]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B);
>plotSegment(B,C);
>plotSegment(C,D);
>plotSegment(D,A);
>plotSegment(A,C,"k1");
>plotSegment(B,D,"k2");
>k1=lineThrough(A,C);
>k2=lineThrough(B,D);
>p=lineIntersection(k1,k2);
>plotLine(k1); plotLine(k2);
>plotPoint(p,"P");
>r=norm(p-projectToLine(p,lineThrough(A,B)))

```

2

```

>plotCircle(circleWithCenter(p,r),"lingkaran dalam segi-4 ABCD");
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB

```

4

```

>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD

```

4

```
>AD=norm(A-D) // panjang sisi AD
```

4

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi BC
```

4

```
>AB.CD
```

16

```
>AD.BC
```

16

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)  
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):  
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)  
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):  
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):  
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```