

Αρχικές οδηγίες

Στη δραστηριότητα δίνεται μία προεπιλεγμένη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ το οποίο μπορείς να μεταβάλλεις με τον αντίστοιχο δρομέα x_0 και η εφαπτομένη τής γραφικής της παράστασης σε αυτό.

Θυμήσου ότι, ο αριθμός $f'(x_0)$ παριστάνει την κλίση (συντελεστή διεύθυνση) τής εφαπτομένης τής γραφικής παράστασης τής f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Σε κάθε σκέλος της δραστηριότητας επέλεξε το κουτί «κλίση εφαπτομένης» για να εμφανιστεί η κλίση της εφαπτομένης στο x_0 .

Μπορείς, σε κάθε περίπτωση, να επιλέγεις και το κουτί «γραφική παράσταση f' » ώστε να βλέπεις και τη γραφική παράσταση της παραγώγου $f'(x)$.

Πώς μπορούμε να συνδέσουμε την παράγωγο μίας συνάρτησης με τα ακρότατά της.

1. Παρατήρησε τη γραφική παράσταση και βρες, αν υπάρχουν, τα κρίσιμα σημεία και τα ακρότατα. Πειραματίσου μεταβάλλοντας το σημείο A μέσω του αντίστοιχου δρομέα και παρατήρησε σε κάθε θέση την κλίση της εφαπτομένης ή με άλλα λόγια την παράγωγο $f'(x_0)$ της f στο x_0 .
2. Επίλεξε το κουτί «Ακρότατα» και απάντησε στα ερωτήματα που εμφανίζονται. Αν η απάντησή σου είναι σωστή, αυτή θα γίνεται πράσινη διαφορετικά θα γίνεται κόκκινη.
3. Επίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 2» για να επιλέξεις μία νέα συνάρτηση. Αποεπίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» και επανάλαβε την ίδια διαδικασία με αυτή των βημάτων 2 και 3.
4. Επίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 3».
5. Επίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 4».
6. Επίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 5».

Με το κουμπί “Zoom” (κλικ όσες φορές θέλεις) μπορείς να δεις καλύτερα πώς είναι η γραφική παράσταση της f κοντά στο 0. Παρατηρώντας με προσοχή τη γραφική της παράσταση, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πόσα τοπικά μέγιστα έχει η συνάρτηση f ;
- Έχει η f μέγιστο;
- Πόσα τοπικά ελάχιστα έχει η συνάρτηση f ;
- Έχει η f ελάχιστο;

Η συνάρτηση f έχει άπειρα τοπικά μέγιστα και άπειρα τοπικά ελάχιστα, αλλά δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

Αφού ολοκληρώσεις με όλες τις συναρτήσεις της δραστηριότητας, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο.

Λάθος. Για παράδειγμα στη συνάρτηση 1 ισχύει $f'(0) = 0$, αλλά δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$.

Πρέπει δεξιά και αριστερά του x_0 να αλλάζει η f μονοτονία.

Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Λάθος. Δες την συνάρτηση 2, η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ ακρότατο, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Ακρότατο μπορεί να παρουσιάζει μία συνάρτηση f και σε σημεία x_0 στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη.

Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Λάθος. Δες την συνάρτηση 3, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 8$, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, αλλά $f'(8) \neq 0$.

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , παρουσιάζει σε αυτό ακρότατο και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0) = 0$.

Αν το x_0 είναι κρίσιμο σημείο μίας συνάρτησης f και αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Λάθος. Δες την συνάρτηση 4, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, αλλά μπορεί στο $x_0 = 1$ να μην έχει ακρότατο (περίπτωση 1) ή να έχει τοπικό ελάχιστο (περίπτωση 2).

Η σχετική πρόταση έχει ως μία από τις προϋποθέσεις τις η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0 .

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α, β) , τότε θα παρουσιάζει ένα τουλάχιστον ολικό ακρότατο.

Λάθος. Δες τη συνάρτηση 5, η οποία έχει άπειρα τοπικά ακρότατα αλλά κανένα ολικό.

Το σχετικό θεώρημα (ΘΜΕΤ) απαιτεί συνεχή συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε, στα άκρα α και β , θα παρουσιάζει σίγουρα ακρότατο.

Λάθος. Δες τη συνάρτηση 5 (2^η περίπτωση), η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ αλλά στο 0 δεν έχει ακρότατο.

Είναι απαραίτητο η συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη σε περιοχή δεξιά του α : $(\alpha, \alpha + \delta)$, $\delta > 0$.