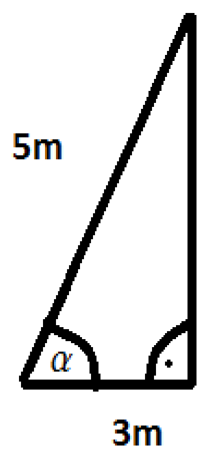
Aufgaben zu sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck

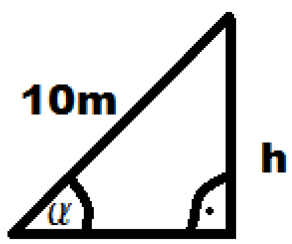
1) Eine Leiter ist 3m von einer Wand entfernt. Die Leiter ist 5m lang. In welcher Höhe ist die Leiter an die Wand gelehnt und welchen Neigungswinkel α hat sie?



2) Eine Straße ist 10m lang und auf einem Schild steht, dass die Steigung 5% beträgt.

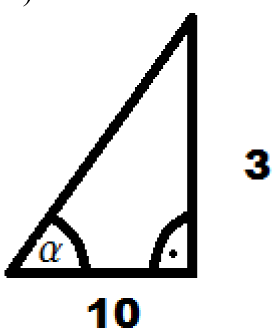
a) Wie groß ist die Neigung von α ?

b) Welchen Höhenunterschied h ergeben sich auf den 10m der Straße?

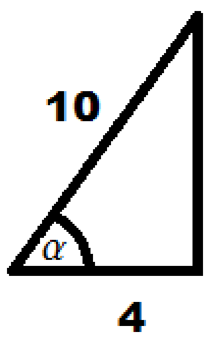


3) Gesucht wird α:

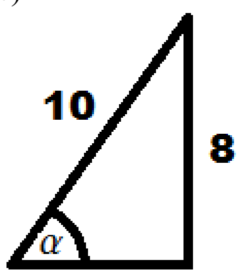
a)



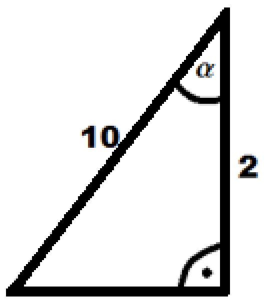
b)



c)

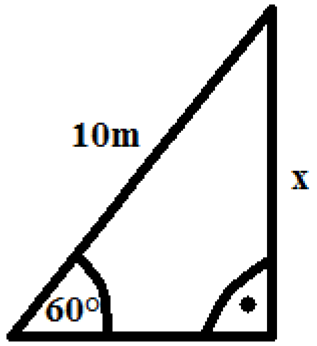


d)

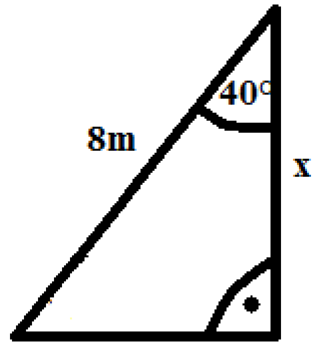


4) Gesucht wird x:

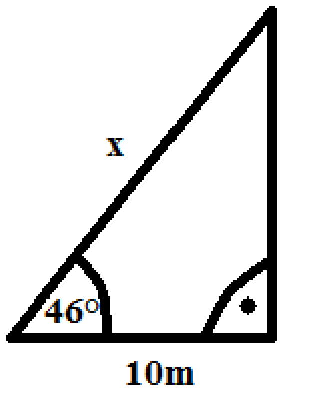
a)



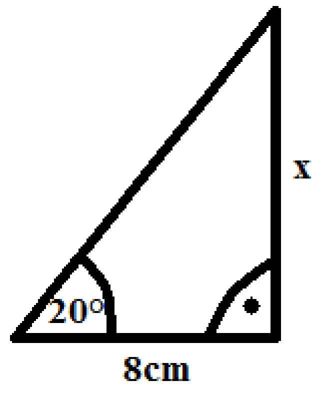
b)



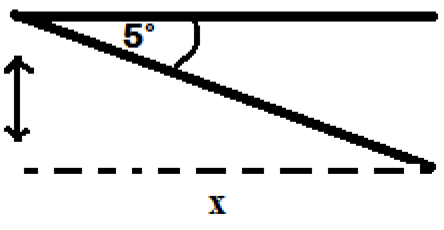
c)



d)



5) Ein Flugzeug hat eine Höhe von 2800m und befindet sich im Sinkflug, so dass es gegen die Horizontale einen Winkel von 5° hat. Wie viele m benötigt es bis es am Boden ankommt (bezogen auf den ebenen Boden, siehe Grafik unten)?



Lösungen:

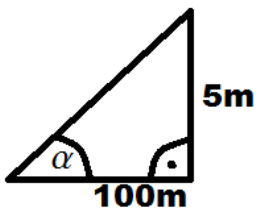
1) 5cm ist die Hypotenuse lang und 3cm die Ankathete (liegt am Winkel an):

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{5} \qquad |\cos^{-1}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(3/5) \approx 53{,}13°$$

2)a) 5% Steigung bedeutet, dass auf 100m ein Höhenunterschied von 5m überbrückt wird.



Ankathete = 100m

Gegenkathete = 5m

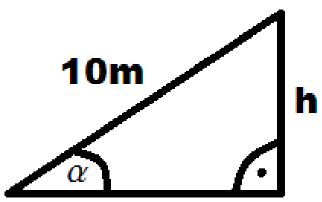
Damit gilt: $\tan(\alpha) = \frac{5}{100}$

$\tan(\alpha) = 0{,}05$ (allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Steigung in \%}}{100}$)

$\alpha = \tan^{-1}(0{,}05) \approx 2{,}8624°$ (am besten im Taschenrechner belassen, wird bei b) benötigt)

$\alpha \approx 2{,}86°$ auf zwei Stellen gerundet.

b)



Hier ist die Hypotenuse gegeben (10m)

und die Gegenkathete gesucht.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{10m} \qquad |\cdot 10m$$

$$10m \cdot \sin(\alpha) = h$$

α kennen wir aus a): $\alpha \approx 2{,}8624°$

Also $h = 0{,}499m \approx 0{,}5m$

3)a) Ankathete = 10

Gegenkathete= 3

$\tan(\alpha) = \frac{3}{10}$ | $\tan^{-1}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \approx 16{,}699° \approx 16{,}7°$

b) Ankathete = 4

Hypotenuse = 10

$\cos(\alpha)= \frac{4}{10}$ | $\cos^{-1}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{10}\right) \approx 66{,}42°$

c) Gegenkathete = 8

Hypotenuse = 10

$\sin(\alpha)= \frac{8}{10}$ | $\sin^{-1}$

$\alpha= \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) \approx 53{,}13°$

d) Hypotenuse = 10

Ankathete = 2

$\cos(\alpha) = \frac{2}{10}$ | $\cos^{-1}$

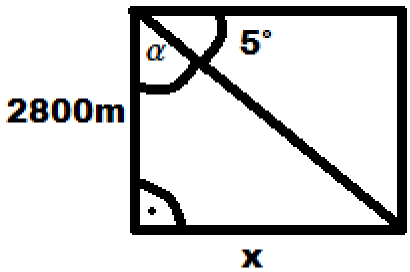
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{10}\right) \approx 78{,}46°$

4)

	Gegeben ist:	Berechnung der gesuchten Größe:
a)	Hypotenuse = 10m Gegenkathete = x	$\sin(60°) = \frac{x}{10m}$ | $\cdot 10m$ $x = 10m \cdot \sin(60°) \approx 8{,}66m$

	Gegeben ist:	Berechnung der gesuchten Größe:
b)	Hypotenuse = 8m Ankathete = x	$\cos(40°)=\frac{x}{8m} \quad \vert \cdot 8m$ $x = 8m\cdot\cos(40°) \approx 6{,}13m$
c)	Hypotenuse = x Ankathete = 10m	$\cos(46°)=\frac{10m}{x} \quad \vert\cdot x$ $x\cdot\cos(46°) = 10m \quad \vert :\cos(46°)$ $x = \frac{10m}{\cos(46°)} \approx 14{,}4m$
d)	Ankathete = 8cm Gegenkathete = x	$\tan(20°) = \frac{x}{8cm} \quad \vert \cdot 8cm$ $x = \tan(20°)\cdot 8cm = 2{,}91cm$

5)



$\alpha = 90° - 5° = 85°$

Ankathete = 2800m

Gegenkathete = x

$\tan(85°) = \frac{x}{2800m} \quad \vert \cdot 2800m$

$x = 2800m\cdot\tan(85°)$

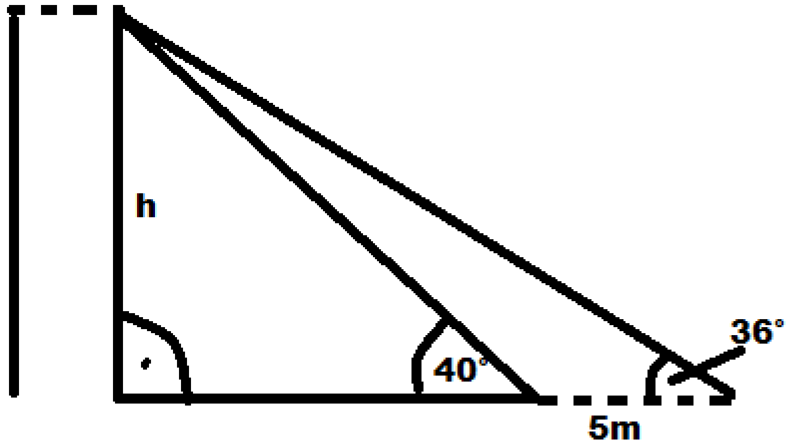
$\approx 32004{,}1m$

$\approx 32km$

Oder: $\tan(85°) = \frac{2800m}{x}$ und somit gilt: $x = \frac{2800m}{\tan(85°)}$

Aufgaben zum Sinus- und Kosinussatz

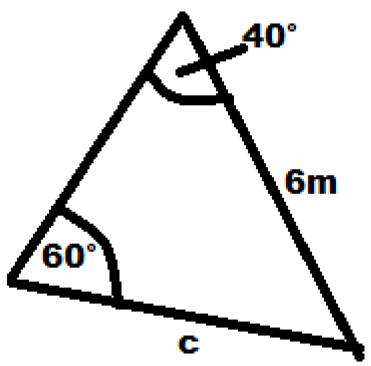
1) Gesucht wird die Höhe h des Turms links:



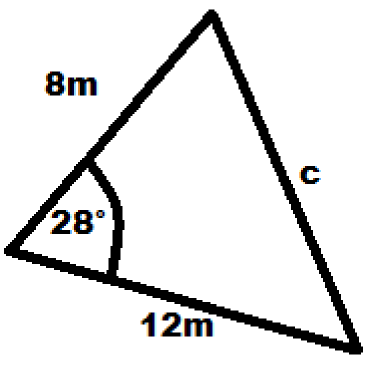
2) Von dem Ort A sind die Orte B und C jeweils 5km und 6km entfernt. Von A aus sieht man die Orte B und C unter einem Winkel von 60°. Wie weit sind die Orte B und C voneinander entfernt?

3) Gesucht wird c:

a)

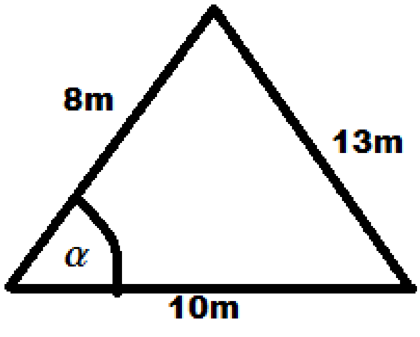


b)

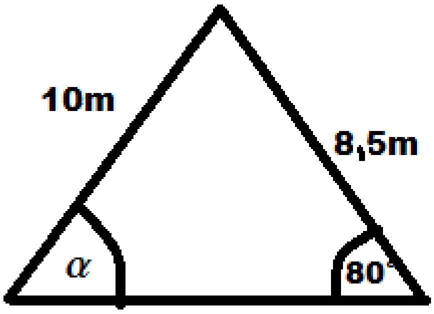


4) Gesucht wird α:

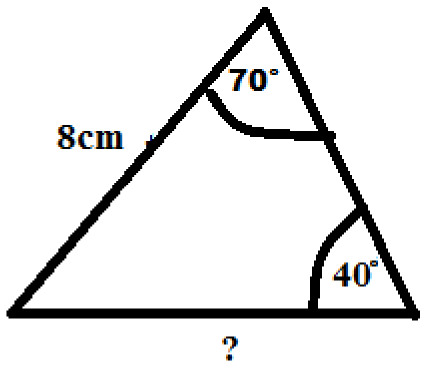
a)



b)

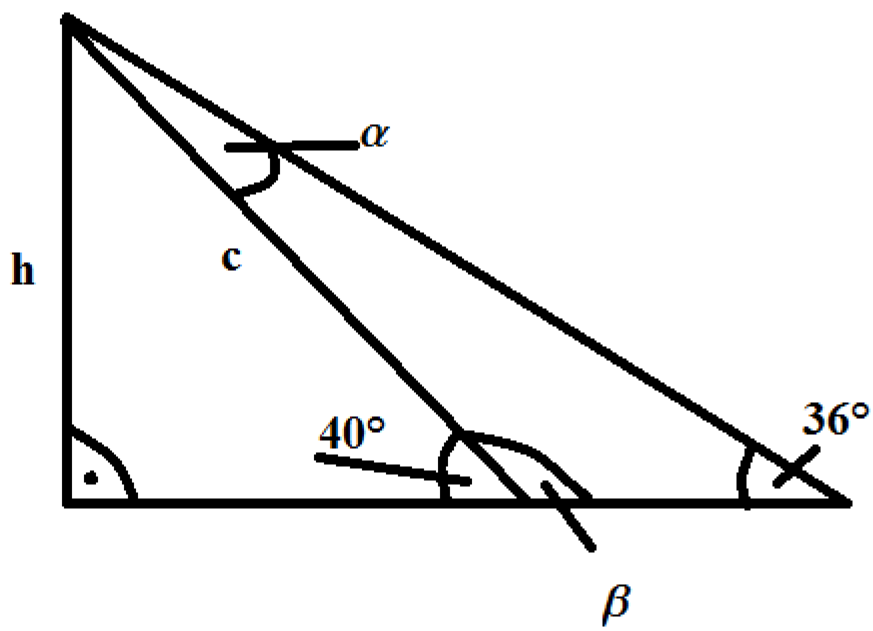


c)



Lösung:

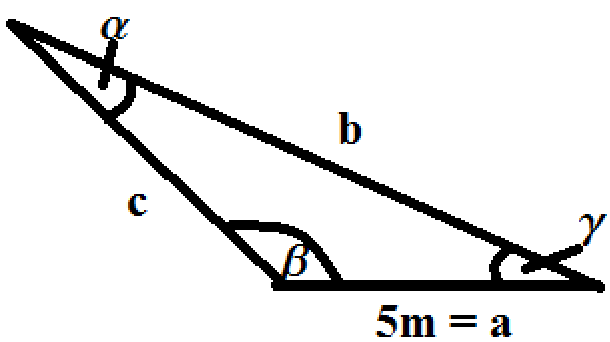
1)



$\beta = 180° - 40° = 140°$

$\alpha = 180° - 36° - 140° = 4°$

$\gamma = 36°$



Wir haben einmal eine Seite mit Winkel gegenüber, ein Fall für den Sinussatz:

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ oder $\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$

Unser Ziel ist es, eine Seite im rechtwinkligen Dreieck (links) zu erhalten. Diese Seite wäre die Seite c, denn hier grenzen die Dreiecke aneinander.

Wir setzen ein:

$$\frac{5\text{m}}{\sin(4°)} = \frac{c}{\sin(36°)} \qquad |\cdot \sin(36°)$$

$$\sin(36°) \cdot \frac{5\text{m}}{\sin(4°)} = c$$

$$c \approx 42{,}13\text{m}$$

Wir können das Ergebnis im Taschenrechner belassen (bzw. man sollte bei einem Zwischenergebnis mehr Nachkommastellen verwenden).

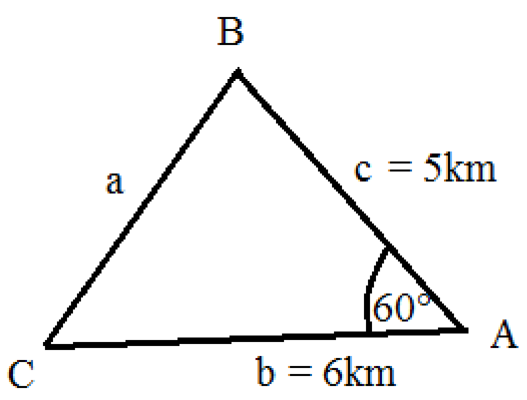
Jetzt haben wir im rechtwinkligen Dreieck links auch die Hypotenuse c, sie ist ca. 42,13m lang. Wir kennen auch einen Winkel (40°, siehe Skizze oben). Gesucht wird nun die Gegenkathete zu diesem Winkel:

$$\sin(40°) = \frac{h}{c} \qquad | \cdot c$$

$$h = c \cdot \sin(40°) \approx 27{,}08\text{m} \quad \text{(mit c von oben)}$$

Also ist der Turm ca. 27,08m hoch.

2)



Dies ist ein Fall für den Kosinussatz, denn wir haben zwei Seiten und den darin eingeschlossenen Winkel.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

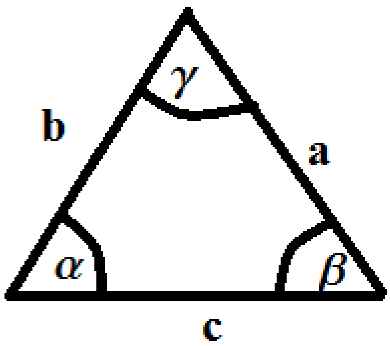
$a^2 = (6km)^2 + (5km)^2 - 2 \cdot 6km \cdot 5km \cdot \cos(60°)$

$a^2 = 31km^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$

$a \approx 5{,}57km$

Also sind die Orte B und C ca. 5,57km entfernt.

3a) Wir kennen eine Seite mit gegenüberliegendem Winkel, also ein Fall für den Sinussatz.



$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{c}{\sin(40°)} = \frac{6m}{\sin(60°)} \qquad | \cdot\sin(40°)$$

$$c = \sin(40°) \cdot \frac{6m}{\sin(60°)} \approx 4{,}45m$$

b) Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, ein Fall für den Kosinussatz:

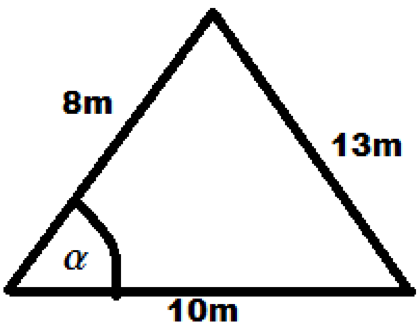
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

$c^2 = (8m)^2 + (12m)^2 - 2 \cdot 8m \cdot 12m \cdot \cos(28°)$

$c^2 = (8m)^2 + (12m)^2 - 2 \cdot 8m \cdot 12m \cdot \cos(28°) \quad |\sqrt{\quad}$

$c \approx 6{,}2m$

4a) Alle Seiten gegeben, ein Winkel gesucht => Kosinussatz



Wir müssen nur die Formel umstellen und nach α auflösen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad | -b^2 - c^2$$

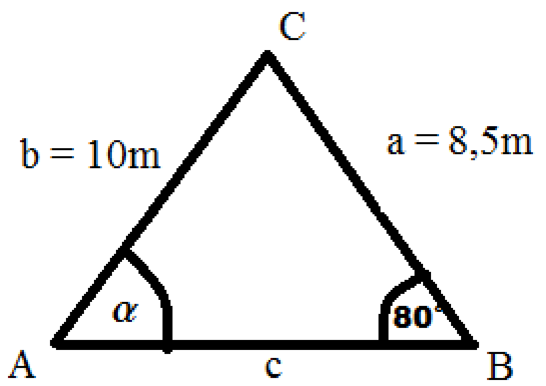
$$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad |:(-2bc)$$

$$\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc} = \cos(\alpha) \text{ oder (mit (-1) erweitert): } \cos(\alpha) = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{13^2-8^2-10^2}{-2 \cdot 8 \cdot 10} = -\frac{1}{32} \quad | \cos^{-1}(\,)$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-1/32) \approx 91{,}79°$$

b)



Man könnte auch ohne Bezeichnungen auskommen, denn der Sinussatz geht wir folgt:

$$\frac{\text{Seite}}{\sin(\text{Winkel gegenüber der Seite})} = \frac{\text{Seite}}{\sin(\text{Winkel gegenüber der Seite})}$$

Also:

$$\frac{8{,}5\text{m}}{\sin(\alpha)} = \frac{10\text{m}}{\sin(80°)}$$

Man kann natürlich auf beiden Seiten den Kehrwert bilden:

$$\frac{\sin(\alpha)}{8{,}5\text{m}} = \frac{\sin(80°)}{10\text{m}}$$

So kann man dafür sorgen, dass die Unbekannte immer im Zähler steht.

Jetzt muss man nur noch mit 8,5m multiplizieren:

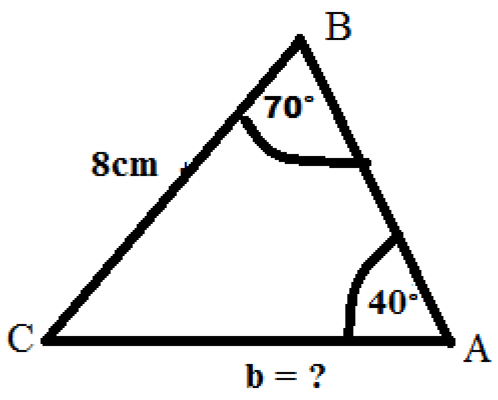
$$\sin(\alpha) = 8{,}5\text{m} \cdot \frac{\sin(80°)}{10\text{m}}$$

$$\sin(\alpha) = 0{,}83708659 \ldots \quad | \sin^{-1}$$

(das obige Ergebnis im Taschenrechner belassen oder viele Nachkommastellen eingeben, sonst kann es ungenau werden)

$$\alpha \approx 56{,}83°$$

c)



Auch hier hätte man keine Bezeichnungen gebraucht, bis für die unbekannte Seite:

$$\frac{b}{\sin(70°)} = \frac{8\mathrm{cm}}{\sin(40°)}$$

Wir multiplizieren mit sin(70°):

$$b = \sin(70°) \cdot \frac{8\mathrm{cm}}{\sin(40°)}$$

$$b \approx 11{,}7\mathrm{cm}$$

Bemerkung: Man kann auch immer, wenn man zwei Winkel angegeben hat, den dritten Winkel berechnen, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Hier wäre $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 70°$. Dieser wird benötigt, falls man oben c statt b berechnen müsste.