Material Teórico - Módulo Elementos básicos de geometria plana - Parte 3

Mais Pontos Notáveis de um Triângulo

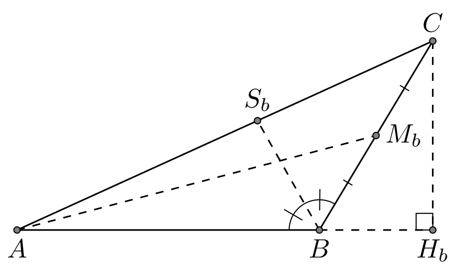
Oitavo ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Pontos notáveis de um triângulo

Recordamos que uma *ceviana* de um triângulo é qualquer segmento que tem uma extremidade num vértice do triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice. O nome genérico *ceviana* foi dado a esses segmentos em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva. Ele estabeleceu um resultado famoso, conhecido como o *Teorema de Ceva*, que dá uma condição necessária e suficiente para que três cevianas de um triângulo, cada uma partindo de um vértice diferente, sejam concorrentes (veja a Seção 4.4 de [1]). Conforme visto no tópico *Congruência de Triângulos e Aplicações - Parte 2*, do Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana – Parte 2, as *cevianas notáveis* de um triângulo são: as *medianas*, as *bissetrizes internas* e as *alturas*.

Na figura abaixo, traçamos a mediana relativa ao vértice A, a bissetriz interna relativa ao vértice B e a altura relativa ao vértice C de um triângulo ABC.



Aplicações imediatas do Teorema de Ceva (veja novamente [1]) garantem que:

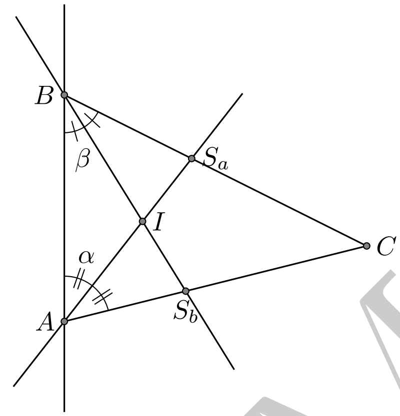
(i) as três medianas de um triângulo concorrem num mesmo ponto, chamado *baricentro* do triângulo;

(ii) as três bissetrizes internas de um triângulo concorrem num mesmo ponto, o *incentro* do triângulo;

(iii) as retas suportes das alturas de um triângulo concorrem num mesmo ponto, chamado o *ortocentro* do triângulo.

Outro ponto importante associado a um triângulo é o ponto de interseção das mediatrizes de seus lados, chamado de *circuncentro* do triângulo.

Os pontos de encontro das cevianas notáveis (baricentro, incentro e ortocentro) e das mediatrizes são denominados pontos *notáveis de um triângulo*. O baricentro já foi apresentado no tópico *Quadriláteros* desse mesmo módulo; os demais serão objetos de estudo neste tópico. Não iremos utilizar o Teorema de Ceva, pois o mesmo requer conteúdo não previsto para o 8° ano. Além disso, os argumentos que utilizaremos são mais adequados para estabelecer propriedades adicionais que esses pontos possuem. Iniciamos este estudo observando que, pelo Postulado das Paralelas de Euclides, duas bissetrizes internas de um triângulo sempre se intersectam (veja a figura a seguir).

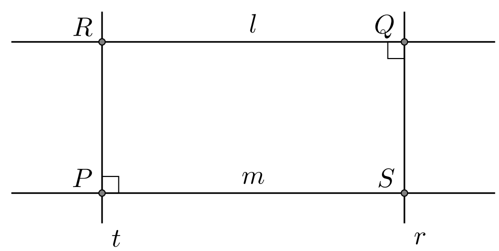


A soma $\alpha + \beta$ é inferior a 180°.

Outra consequência do Postulado das Paralelas é o lema a seguir.

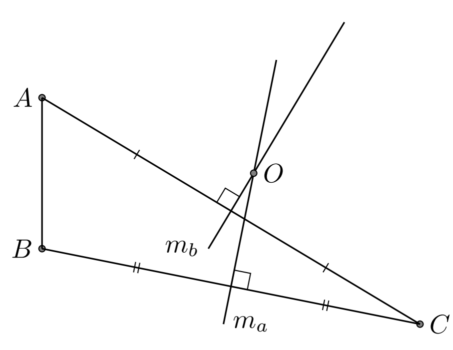
Lema 1. *Se l e m são duas retas paralelas, a reta t é perpendicular à reta m e a reta r é perpendicular à reta l, então as retas t e r coincidem ou são retas paralelas.*

Demonstração. Sejam P o ponto de interseção das retas t e m e Q o ponto de interseção das retas r e l. A reta t é perpendicular à reta l num ponto R de l e a reta r é perpendicular à reta m num ponto S de m.



Se $R = Q$ então a unicidade da perpendicular diz que r e t coincidem. Agora, se $Q \neq R$, então r e t são retas distintas, e segue do Teorema dos Ângulos Alternos e Internos que r e t são retas paralelas. □

Usando esse lema, concluímos que duas mediatrizes de um triângulo sempre se intersectam.

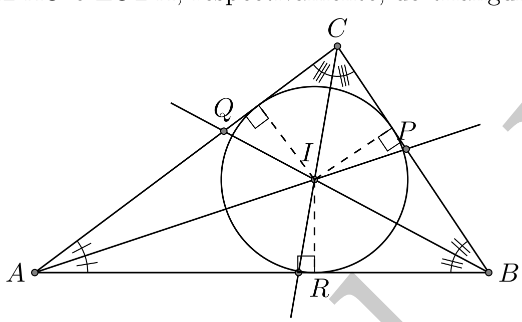


De fato, dado um triângulo ABC (veja a figura anterior), sejam m_a e m_b as mediatrizes relativas aos lados de medidas $BC = a$ e $AC = b$, respectivamente. Sejam também $M_a = m_a \cap \overline{BC}$ e $M_b = m_b \cap \overline{AC}$. Temos que a reta m_a é a perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ (reta suporte do lado $\overline{BC}$) por M_a e a reta m_b é a perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ (reta suporte do lado $\overline{AC}$) por M_b. Logo, se m_a e m_b fossem paralelas, então o mesmo deveria ocorrer com as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, o que claramente não é o caso.

Para os próximos resultados precisaremos de duas definições. Primeiramente, dizemos que *um polígono está inscrito num círculo* se seus vértices estão sobre este círculo; neste caso, dizemos também que *o círculo está circunscrito ao polígono.* Por outro lado, *um polígono está circunscrito a um círculo* se seus lados são tangentes a este círculo; neste caso, dizemos também que o *círculo está inscrito no polígono.*

Teorema 2 (Incentro)**.** *As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se intersectam num ponto equidistante dos lados do triângulo, chamado incentro. Ele é o centro do círculo inscrito ao triângulo.*

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ as bissetrizes dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$, respectivamente, do triângulo ABC.



Temos que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ se intersectam num ponto I e, além disso, esse ponto está no interior do triângulo, uma vez que está no interior de dois de seus ângulos. Da caracterização da bissetriz como lugar geométrico, temos:

$$I \in \overrightarrow{AP} \Rightarrow d(I;\, \overleftrightarrow{AB}) = d(I;\, \overleftrightarrow{AC})$$

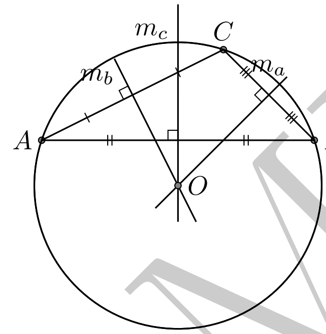
e

$$I \in \overrightarrow{BQ} \Rightarrow d(I;\, \overleftrightarrow{AB}) = d(I;\, \overleftrightarrow{BC}),$$

onde $d(I; r)$ denota a distância de I à reta r. Então, I é um ponto equidistante dos lados $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ do ângulo $\angle ACB$, de forma que, aplicando novamente a caracterização da bissetriz como lugar geométrico, concluímos que I está sobre a bissetriz $\overrightarrow{CR}$ do ângulo $\angle ACB$. □

Teorema 3 (Circuncentro)**.** *As mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam num ponto, chamado circuncentro, que é equidistante dos vértices do triângulo. Ele é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo e sejam m_c, m_a e m_b as mediatrizes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



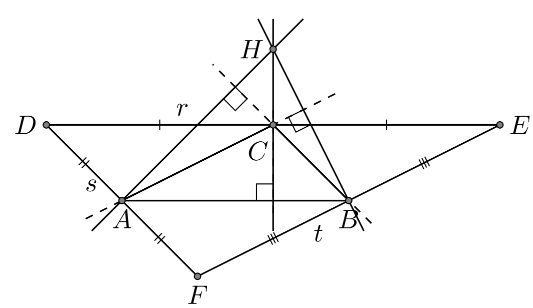
Conforme observamos logo após o Lema 1, as retas m_a e m_c são concorrentes num ponto O. Além disso, da caracterização da mediatriz como lugar geométrico, temos que

$$O \in m_a \Rightarrow OB = OC \quad \text{e} \quad O \in m_c \Rightarrow OA = OB.$$

Portanto, $AO = CO$ e, invocando novamente a caracterização da mediatriz como lugar geométrico, concluímos que o ponto O também está na mediatriz m_b do lado $\overline{AC}$. Assim, m_c, m_a e m_b passam todas por O, que é um ponto equidistante dos vértices do triângulo. □

Teorema 4 (Ortocentro)**.** *As retas suportes das alturas de um triângulo se intersectam num ponto, chamado ortocentro.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Tracemos as retas r, s e t, passando pelos vértices do triângulo e paralelas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo, respectivamente (veja a figura abaixo). Novamente pelo Lema 1, essas retas se intersectam duas a duas. De fato, se r e s fossem retas paralelas, então $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ deveriam ser retas paralelas, o que não ocorre.



As interseções das retas r, s e t determinam um triângulo DEF ($D = r \cap s$, $E = r \cap t$ e $F = s \cap t$). Além disso, por terem pares de lados opostos paralelos, os quadriláteros $ABEC$ e $ABCD$ são paralelogramos. Portanto, os pares de lados opostos são congruentes, de sorte que, em particular, temos $AB = CE$ e $AB = DC$; logo, C é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$. Assim, a reta suporte da altura h_c, relativa ao vértice C do triângulo ABC, é a mediatriz do lado $\overline{DE}$ do triângulo DEF. Raciocínios análogos garantem que o mesmo ocorre para as outras alturas h_a e h_b do triângulo ABC. Segue, pois, do Teorema 3, que essas alturas se intersectam no circuncentro do triângulo DEF. Portanto, o ortocentro H do triângulo ABC é o circuncentro de DEF. □

Se $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$ são as medianas do triângulo ABC, o triângulo $M_aM_bM_c$ é denominado *triângulo medial do triângulo ABC*. Assim, como consequência da demonstração do teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 5. *O circuncentro de um triângulo coincide com o ortocentro de seu triângulo medial.*

Demonstração. Nas notações da demonstração do teorema anterior, mostramos que o circuncentro de DEF é precisamente o ortocentro de ABC, o qual é seu triângulo medial. □

Finalizamos esta seção observando que as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo são usadas em várias relações métricas, que envolvem a inscrição ou circunscrição de um triângulo num círculo. Além disso, eles podem ser o ponto chave na solução de um problema de Geometria.

2 Posições relativas do circuncentro e ortocentro

Uma maneira adequada de orientar nossa argumentação na prova de um teorema em Geometria, ou mesmo na busca de uma solução para um problema dado, é utilizar uma *figura fidedigna*. Em outras palavras, precisamos tomar o cuidado de fazer uma figura fiel ao problema, de modo que ela não nos induza a conclusões erradas, nem tampouco retrate apenas uma situação particular do problema.

No que segue, usando uma figura mal construída, fornecemos uma "prova consistente" de que todos os triângulos são isósceles [1]. Entretanto, claramente este não é um teorema de Geometria. (A título de curiosidade, sugerimos ao leitor compor a figura usada na "demonstração" desse "teorema" com o Geogebra!)

Teorema 6 (Falso Teorema)**.** *Todos os triângulos são isósceles, ou seja, possuem um par de lados congruentes.*

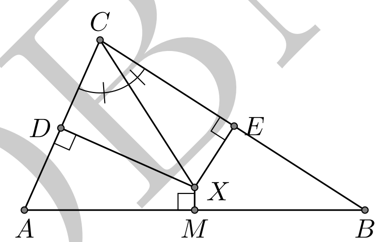
Demonstração. Seja dado um triângulo arbitrário ABC. Desenhe o segmento $\overline{CX}$ contido na bissetriz do ângulo $\angle ACB$, em que X é a interseção dessa bissetriz com a mediatriz do lado $\overline{AB}$ (veja a figura a seguir).

Construa os segmentos $\overline{XD}$, $\overline{XE}$ e $\overline{XM}$, baixados de X aos pés das perpendiculares aos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Pelo critério LAAo, os triângulos CDX e CEX são congruentes; logo, $CD = CE$ e $XD = XE$. Por outro lado, por construção $\overline{XM}$ é a mediatriz do lado $\overline{AB}$, de modo que $XA = XB$. Então, usando o critério cateto-hipotenusa de congruência de triângulos retângulos, concluímos que os triângulos ADX e BEX são congruentes; logo, $DA = EB$.

Assim, podemos escrever

$$CA = CD + DA = CE + EB = CB$$

e, concluímos que o triângulo ACB é isósceles de base $\overline{AB}$.



□

Conforme o leitor atento deve ter observado, o erro na "demonstração" anterior vem do fato de que a figura que desenhamos sugere que, em todo triângulo, a bissetriz interna relativa a um vértice e a mediatriz relativa ao lado oposto se intersectam em um ponto situado no interior do triângulo. Entretanto, isto, de fato, nunca ocorre, e convidamos o leitor a provar esta última afirmação após ler o material subsequente desta seção.

A discussão acima mostra a importância de analisar com mais cuidado as posições dos pontos notáveis de um triângulo em relação ao mesmo. Nesse sentido, mostraremos a seguir que a posição do circuncentro em relação ao triângulo permite classificá-lo quando às medidas de seus ângulos, e o mesmo ocorre com o ortocentro.

Antes de enunciar a classificação em relação ao circuncentro, observamos que a teoria dos ângulos inscritos fornece o resultado auxiliar a seguir.

Lema 7. *Sejam $\angle BAC$ um ângulo inscrito num círculo $C(O, r)$ de centro O e $\angle BOC$ o ângulo central associado. Temos:*

(a) O arco subentendido por $\angle BAC$ é um semicírculo (equivalentemente, $B\widehat{O}C = 180°$) se, e somente se, o centro O do círculo é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

(b) O arco subentendido pelo ângulo $\angle BAC$ é um arco maior $B\overset{\frown}{P}C$ ("equivalentemente", $B\widehat{O}C > 180°$) se, e somente se, o vértice A do ângulo e o centro O do círculo estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

[1] Cf. STEWART, I., *Almanaque das Curiosidades Matemáticas. Tradutor Diego Alfaro*, Rio de Janeiro: Zahar 2008.

(c) O arco subentendido pelo ângulo $\angle BAC$ é um arco menor $B\widehat{Q}C$ (equivalentemente, $B\widehat{O}C < 180°$) se, e somente se, o vértice A do ângulo e o centro O do círculo estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

Demonstração. A prova do item (a) é imediata e será deixada para o leitor. Faremos a prova do item (b), observando que a prova do item (c) é análoga.

Seja $B\widehat{P}C$ o arco subentendido pelo ângulo $\angle BAC$ (veja a figura a seguir). Temos que P e o vértice A do ângulo estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Também, $B\widehat{P}C$ é um arco maior se, e somente se, P e o centro O do círculo estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Portanto, $B\widehat{P}C$ é um arco maior se, e somente se, o vértice A do ângulo $\angle BAC$ e o centro O do círculo estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

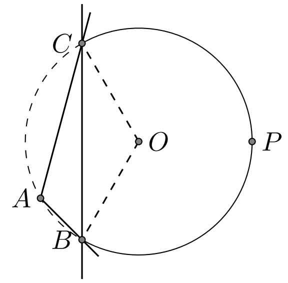


Figura 1: arco maior $B\widehat{P}C$ subentendido pelo ângulo $\angle BAC$.

□

Teorema 8. *Se ABC é um triângulo de circuncentro O, então:*

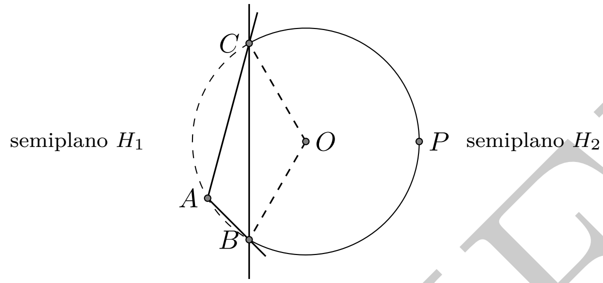
(a) ABC é retângulo se, e somente se, O está sobre um de seus lados. Ademais, sendo esse o caso, O é o ponto médio da hipotenusa do triângulo.

(b) ABC é obtusângulo se, e somente se, O está no exterior do triângulo.

(c) ABC é acutângulo se, e somente se, O está no interior do triângulo.

Demonstração. A prova do item (a) segue do seguinte fato, já estabelecido: um triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $\overline{BC}$ se, e somente se, está inscrito em um semicírculo $B\widehat{A}C$, de diâmetro $\overline{BC}$. A seguir, faremos a prova do item (b), deixando a prova de (c) a cargo do leitor.

Seja ABC um triângulo de circuncentro O. Se o ângulo inscrito $\angle BAC$ tem medida $B\widehat{A}C > 90°$, então o ângulo subentendido é um arco maior e, pelo lema anterior, A e O estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$ (veja a figura 2). Logo, O está no exterior do triângulo ABC.

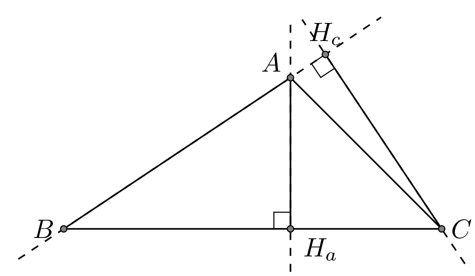


Reciprocamente, dado um triângulo ABC, se seu circuncentro O é um ponto do exterior de ABC, então uma das retas suportes de seus lados (i.e., uma reta determinada por dois vértices do triângulo) determina dois *semiplanos abertos* H_1 e H_2, com H_1 contendo o terceiro vértice A e H_2 contendo o circuncentro O. Sem perda de generalidade (veja novamente a figura 2), vamos supor que tal reta seja $\overleftrightarrow{BC}$, de forma que, neste caso, A e O estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$. Uma vez mais pelo lema que antecede o teorema, o arco subentendido pelo ângulo $\angle BAC$ é um arco maior e, consequentemente, o Teorema do Ângulo inscrito diz que $B\widehat{A}C > 90°$. Portanto, o triângulo ABC é obtusângulo. □

A classificação em relação à posição do ortocentro usa resultados que decorrem do Teorema do Ângulo Externo. Para tanto, precisamente de mais um resultado auxiliar.

Lema 9. *Sejam ABC um triângulo e H_a o pé da altura relativa ao vértice A. Se $\angle BAC$ é o maior ângulo do triângulo, então H_a está situado sobre o lado oposto $\overline{BC}$. Além disso, os pés H_b e H_c das alturas relativas aos outros dois vértices são pontos situados sobre os lados opostos aos seus respectivos vértices se, e somente se, $\angle BAC$ for um ângulo não obtuso.*

Demonstração. Exercício! Use o Teorema do Ângulo Externo. □



H_a é o pé da altura relativa ao vértice A

$\overline{AH_a}$ é a altura relativa ao vértice A

H_c é o pé da altura relativa ao vértice C

$\overline{CH_c}$ é a altura relativa ao vértice C

Teorema 10. *Se ABC é um triângulo de ortocentro H, então:*

(a) *ABC é retângulo se, e somente se, H é um dos vértices do triângulo.*

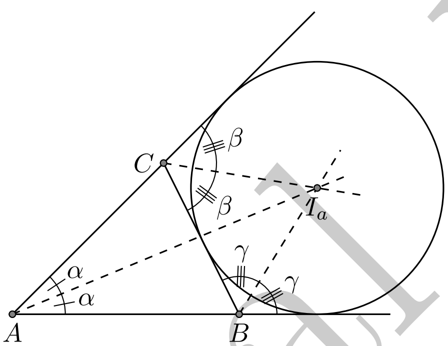
(b) *ABC é obtusângulo se, e somente se, H está no exterior do triângulo.*

(c) *ABC é acutângulo se, e somente se, H está no interior do triângulo.*

Demonstração. A prova desse resultado segue do lema anterior e também será deixada como exercício para o leitor. □

3 Outros resultados

Iniciamos esta seção observando que associado a todo lado de um triângulo temos duas bissetrizes de ângulos externos, uma para cada extremidade do lado. Segue da caracterização da bissetriz como lugar geométrico e do Axioma das Paralelas que as bissetrizes externas, associadas ao lado de medida $BC = a$ de um triângulo ABC, se intersectam num ponto I_a equidistante das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ e, também, do lado $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo). Consequentemente, novamente pela caracterização da bissetriz como lugar geométrico, concluímos que a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ é a semirreta $\overrightarrow{AI_a}$.

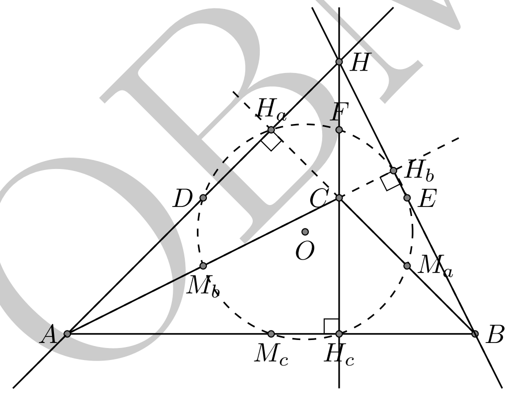


Assim, no exterior do triângulo ABC existem três círculos que são tangentes às retas suportes de seus lados, um círculo para cada lado do triângulo. Mais precisamente, o argumento que esboçamos acima provou o seguinte resultado.

Teorema 11 (Ex-incentro)**.** *Em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado $\overline{BC}$ e aos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Ele é denominado* círculo ex-inscrito ao lado $\overline{BC}$ *e seu centro é o ponto I_a, chamado de* ex-incentro relativo a A, *o qual é equidistantes das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ e, também, do lado $\overline{BC}$.*

Conforme você já deve ter percebido, muitas são as propriedades interessantes dos pontos notáveis de um triângulo. De fato, abordamos aqui apenas uma pequena fração do que é conhecido a esse respeito, e um aprofundamento desse assunto permite estabelecer outros resultados, alguns dos quais são intrigantes e belos como o Círculo de Nove Pontos e a Reta de Euler.

Teorema 12 (O Círculo de Nove Pontos)**.** *O círculo que passa pelos pontos médios dos lados de um triângulo passa também pelos pés de suas alturas e pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices do triângulo a seu ortocentro. Tal círculo éconhecido como o Círculo de Nove Pontos de um triângulo, e seu centro é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro e o circuncentro do triângulo.*



Conforme já observamos anteriormente, o triângulo medial de um triângulo ABC é aquele cujos vértices são os pontos médios dos lados de ABC. Da mesma forma, o *triângulo órtico* de ABC é o triângulo cujos vértices são os pés de suas alturas. Com essa nomenclatura em mãos, temos a seguinte consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 13. *Em todo triângulo, os triângulos medial e órtico têm o mesmo círculo circunscrito.*

Teorema 14 (A reta de Euler)**.** *Em todo triângulo, o circuncentro O, o baricentro G e o ortocentro H são colineares, com G situado sobre $\overline{HO}$. Além disso, G divide $\overline{HO}$ na razão $2:1$, i.e., $HG = 2GO$.*

O teorema do círculo de nove pontos é um resultado devido aos matemáticos franceses Brianchon e Poncelet. Ele é por vezes atribuído a Euler, provavelmente pelo fato de poder ser demonstrado através de uma pequena modificação de uma prova simples do teorema da reta de Euler. Provas dos teoremas acima, juntamente com muitas outras propriedades dos pontos notáveis de um triângulo, podem ser encontradas em [1] e [2].

Um resultado belíssimo de Feuerbach (1882) mostra que o círculo de nove pontos é tangente ao círculo inscrito ao triângulo ABC e também aos três círculos ex-inscritos aos lados de ABC. A demonstração mais simples desse resultado depende da teoria de *Inversão*, estando além do escopo destas notas. Para uma exposição autocontida, referimos o leitor à Seção 5.6 de [2].

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em três encontros de 50 minutos cada. O processo de determinação dos pontos notáveis de um triângulo propicia excelentes oportunidades para o professor rever casos de congruências de triângulos e as caracterizações das principais cevianas de um triânguloe, e devem ser exploradas. Os pontos notáveis de um triângulo são, muitas vezes, pontos-chave para a solução de vários problemas da geometria métrica e também de posição, especialmente aqueles envolvendo construções geométricas. Assim, cabe ao professor selecionar situações-problema em que as propriedades que esses pontos possuem sejam parte importante do processo de solução. A referência [1] contém vários desses problemas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Washington, Editora M.A.A., 1967.