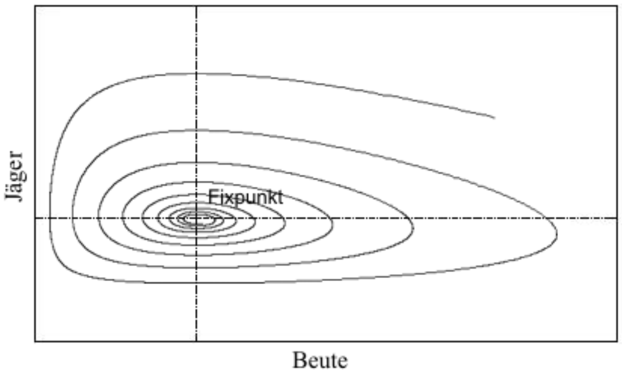
Phasendiagramm

In einem Phasendiagramm trägt man die Größen von zwei Populationen gegeneinander auf.

Räuber-Beute-Modell:

In der nebenstehenden Abbildung ist ein Phasendiagramm des Räuber-Beute-Modells dargestellt. Dieses zeigt die Größe der Beutepopulation in Abhängigkeit von der Größe der Räuberpopulation. Das Phasendiagramm stellt den „Kreislaufcharakter“ des Prozesses dar.



Je nach Wahl der Parameter kann sich die Spirale im Phasendiagramm nach innen zusammenziehen oder nach außen aufschaukeln. Im ersten Fall ist ein stabiles Gleichgewicht möglich. Dieses ist in diesem Phasendiagramm als Fixpunkt, um den die Phasenkurven verlaufen, gekennzeichnet. Im Gleichgewicht ändert sich die Anzahl der Beutetiere und Räuber nicht mehr.

Aufgabe: Da sich die Populationen der Beute und der Räuber im Gleichgewichtspunkt nicht ändern dürfen, muss $\frac{dB}{dt} = 0$ und $\frac{dR}{dt} = 0$ gelten.

1. Verwende die gegebenen Beziehungen, um die Koordinaten des Gleichgewichtspunktes zu bestimmen! Es gibt noch eine weitere Möglichkeit für den Gleichgewichtspunkt. Gib diese ebenfalls an!

$\frac{dB}{dt} = 0$

$g_b \cdot B(t) - f \cdot B(t) \cdot R(t) = 0$

$f \cdot B(t) \cdot R(t) = g_b \cdot B(t) \qquad /: B(t) \neq 0$

$f \cdot R(t) = g_b$

$\frac{dR}{dt} = 0$

$g_r \cdot R(t) \cdot B(t) - s_r \cdot R(t) = 0$

$g_r \cdot R(t) \cdot B(t) = s_r \cdot R(t) \qquad /: R(t) \neq 0$

$g_r \cdot B(t) = s_r$

$\mathrm{R(t)} = \frac{g_b}{f}$ $\mathrm{B(t)} = \frac{s_r}{g_r}$

Da die Größe der Beutepopulation im Phasendiagramm in Abhängigkeit von der Größe der Räuberpopulation dargestellt wird, liegt der Gleichgewichtspunkt somit im Punkt $(\frac{s_r}{g_r}, \frac{g_b}{f})$.

Bei der weiteren Möglichkeit für den Gleichgewichtspunkt muss $\mathrm{B(t)} = 0$ und $\mathrm{R(t)} = 0$ gelten, weshalb das Gleichgewicht im Punkt (0, 0) liegt.

Aufgabe: Öffne das Applet https://www.geogebra.org/m/dmv6wpkw#material/bypvddmb und arbeite mit dem Phasendiagramm. Verändere die Parameter und beobachte, wie sich das Phasendiagramm dadurch verändert!

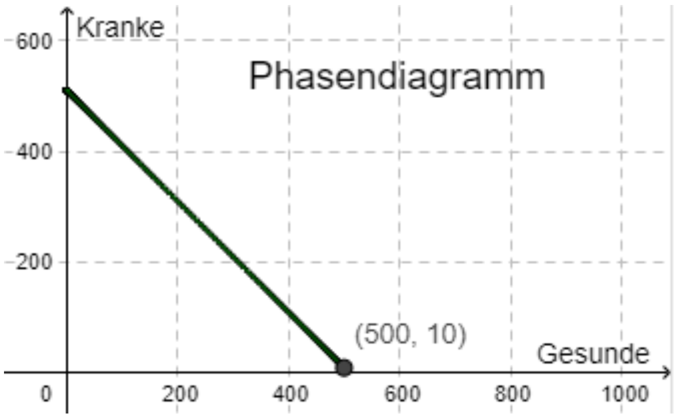
2. Stelle die Werte der Parameter so ein, dass $B_0 = R_0 = 100$, g = d = 0,05 und r = s = 0,0005 gilt. Was kannst du beobachten? Was bedeutet deine Beobachtung im Kontext?

Im Phasendiagramm sind keine Änderungen der Räuberpopulation und der Population der Beute zu erkennen. Es ist nur der Gleichgewichtspunkt bei (100, 100) zu erkennen, was den Startwerten beider Populationen entspricht. Diese Koordinaten des Gleichgewichtspunktes stimmen mit der Berechnung $\left(\frac{0{,}0005}{0{,}05}, \frac{0{,}0005}{0{,}05}\right) = (100{,}100)$ aus den Parametern überein. Da dieser Gleichgewichtspunkt den Startwerten der Populationen entspricht, ändern sich diese nicht. Das bedeutet im Kontext, dass sich die Zuwächse und Abnahmen der beiden Populationen ausgleichen und sich die Größen der Populationen trotz gegenseitiger Beeinflussung nicht verändern.

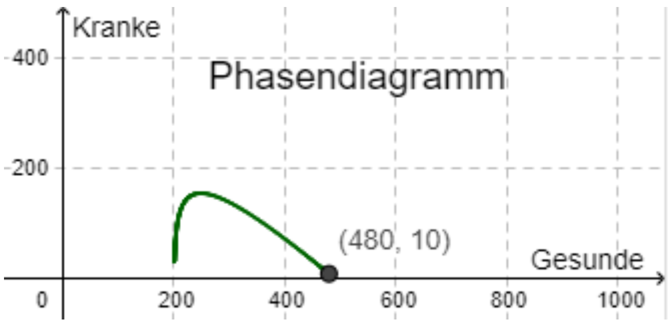
Pandemieverlauf:

Aufgabe: Öffne die Applets für Modell 1: https://www.geogebra.org/m/h2anzdcf#material/k2zbjyfh Modell 2: https://www.geogebra.org/m/h2anzdcf#material/sbx7veyf Modell 3: https://www.geogebra.org/m/h2anzdcf#material/qphvyjn4 und verändere die voreingestellten Parameter nicht!

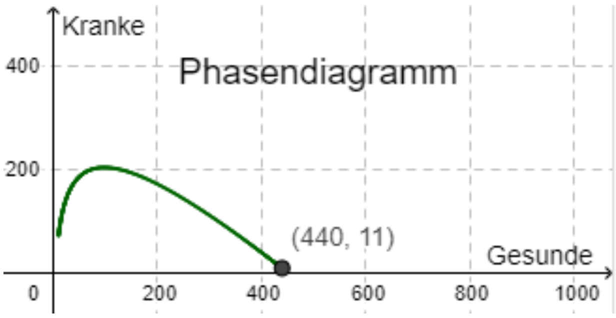
3. Skizziere ein Phasendiagramm für das Modell 1 mit den angegebenen Parametern!



4. Skizziere ein Phasendiagramm für das Modell 2 mit den angegebenen Parametern!



5. Skizziere ein Phasendiagramm für das Modell 3 mit den angegebenen Parametern!



Aufgabe: Öffne folgende Applets für

Modell 1: https://www.geogebra.org/m/dmv6wpkw#material/tmvscqtx

Modell 2: https://www.geogebra.org/m/dmv6wpkw#material/yswpycmz

Modell 3: https://www.geogebra.org/m/dmv6wpkw#material/g6rufbvq

und überprüfe damit deine erstellten Phasendiagramme!

6. Spiele mit den Parametern in den drei Applets und beobachte die Veränderungen der Phasendiagramme!
   Warum kommt es bei den Modellen der Pandemie zu keinem „Kreislauf“?

Es kann zu keinem „Kreislauf“ kommen, da Personen, die bereits einmal erkrankt bzw. immun sind, nicht erneut erkranken können.