Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 26 - equidistancia

1. Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ **que equidiste de los planos** $\Pi_1: 3x+4y-1=0$ **y** $\Pi_2: 4x-3y+9=0$ **.**

Debemos obtener la distancia de un punto arbitrario de la recta a cada uno de los planos e igualar ambas distancias. Es decir.

$$r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=2+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{matrix}\right\}$$ → Punto arbitrario $P(2+2\lambda, -1+3\lambda, 2+2\lambda)$

La distancia de ese punto arbitrario al primer plano será:

$$d(P,\Pi_1)=\frac{|3(2+2\lambda)+4(-1+3\lambda)+0-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{|1+18\lambda|}{5}$$

La distancia del punto arbitrario al segundo plano será:

$$d(P,\Pi_2)=\frac{|4(2+2\lambda)-3(-1+3\lambda)+0+9|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=\frac{|20-\lambda|}{5}$$

Igualamos → $\frac{|1+18\lambda|}{5}=\frac{|20-\lambda|}{5}$ → Al igualar dos valores absolutos debemos considerar la opción positiva (ambos argumentos positivos o negativos) y la opción negativa (un argumento positivo y el otro negativo). Es decir:

$$1+18\lambda=20-\lambda \rightarrow \lambda=1 \rightarrow P(4,2,4)$$

$$-1-18\lambda=20-\lambda \rightarrow -17\lambda=21 \rightarrow \lambda=\frac{-21}{17} \rightarrow P\left(\frac{-8}{17},\frac{-80}{17},\frac{-8}{17}\right)$$

2. Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ **y la recta dada por** $r: x-5=y=\frac{z+2}{-2}$ **.**

a) Determina el punto simétrico de P **respecto de** r **.**

b) Calcula el punto de r **que equidista de** P **y** Q **.**

a) Buscamos un punto $P'(x',y',z')$ simétrico de $P(1,0,-1)$ respecto la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{u}_r=(1,1,-2)$. Tomamos un punto arbitrario de la recta, cuyas coordenadas coincide con las componentes paramétricas de la recta.

$$A(5+t,t,-2-2t)$$

Trazamos el vector $\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t)$ y exigimos que sea perpendicular a la recta. ¿Cómo? Imponiendo que el producto escalar de $\vec{u}_r$ y $\vec{PA}$ sea nulo.

$$\vec{u}_r\cdot\vec{PA}=0 \;\rightarrow\; 4+t+t+2+4t=0 \;\rightarrow\; t=-1$$

Con el valor del parámetro podemos obtener el punto A de la recta que será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Recordamos que el punto medio se obtiene como la semisuma de las componentes de los extremos del segmento.

Si $t=-1 \;\rightarrow\; A(4,-1,0) \;\rightarrow\; (4,-1,0)=(\frac{1+x'}{2},\frac{0+y'}{2},\frac{-1+z'}{2})$

Si dos puntos son iguales, sus coordenadas son iguales. Por lo tanto:

$$x'=7 \;,\; y'=-2 \;,\; z'=1$$

El punto solución es $P'(7,-2,1)$.

b) Buscamos un punto de la recta que equidiste de P y Q . Nuevamente tomamos el concepto de punto arbitrario de la recta.

$$A(5+t,t,-2-2t)$$

Y exigimos que la distancia de P a A sea igual a la distancia de Q a A .

$$\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t) \;\rightarrow\; d(P,A)=|\vec{PA}|=\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}$$

$$\vec{QA}=(3+t,t-1,-3-2t) \;\rightarrow\; d(Q,A)=|\vec{QA}|=\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2}$$

$$16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t=9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t$$

$$17+12t=19+16t \;\rightarrow\; -2=4t \;\rightarrow\; t=\frac{-1}{2}$$

Y con el parámetro obtenemos el punto solución → $A(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1)$

3. Obtener punto de la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ **que equidiste del punto** $P(0,1,-1)$ **y del plano de ecuación general** $\Pi: x+y-z=4$ **.**

Debemos obtener un punto arbitrario de la recta e igualar su distancia al punto P y al plano Π para determinarlo de forma única.

Pasamos la recta a paramétrica para obtener punto arbitrario.

$$y=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A(1-\lambda,\lambda,0)$$

Calculamos las distancias.

$$d(A,P)=\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(-1)^2}=\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}$$

$$d(A,\Pi)=\frac{|1\cdot(1-\lambda)+1\cdot\lambda+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Igualamos distancias

$$\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}=\sqrt{3} \rightarrow 2\lambda^2-4\lambda+3=3 \rightarrow 2\lambda^2-4\lambda=0 \rightarrow \lambda=0,\lambda=2$$

Los puntos solución son: $A(1,0,0)$, $A(-1,2,0)$

4. Sean las rectas $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ **y los planos** $\Pi_1 : x=0$ **y** $\Pi_2 : y=0$ **.**

a) Halla los puntos de la recta r **que equidistan de los planos** Π_1 **y** Π_2 **.**

b) Determina la posición relativa de la recta r **y la recta intersección de los planos** Π_1 **y** Π_2 **.**

a) Tomamos un punto arbitrario de la recta, que es un punto que tiene por coordenadas las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \left\{ \begin{array}{c} x=2-a \\ y=2+3a \\ z=1+a \end{array} \right\} \rightarrow P(2-a, 2+3a, 1+a)$$

Debemos imponer la condición de que la distancia de este punto arbitrario a ambos planos sea la misma. Recordamos la expresión que nos da la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano de ecuación general $\Pi : Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P, \Pi) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

En nuestro ejercicio:

$$d(P, \Pi_1) = \frac{|2-a|}{1} \quad , \quad d(P, \Pi_2) = \frac{|2+3a|}{1}$$

Igualamos ambas distancias:

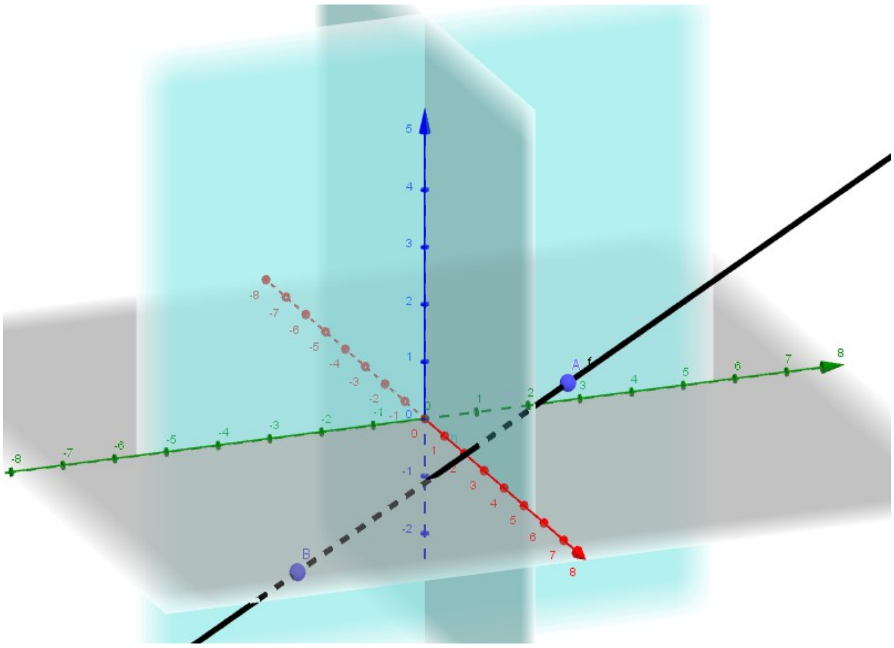
$$|2-a| = |2+3a|$$

Cuando tenemos una igualdad de dos valores absolutos, lo más sencillo para romper los valores absolutos es colocar un + o un – delante de uno de los términos.

$2-a=2+3a \rightarrow a=0$ → Punto solución: $P(2,2,1)$

$2-a=-2-3a \rightarrow a=-2$ → Punto solución: $P(4,-4,-1)$

Representamos en Geogebra la solución de este apartado.



b) La recta formada por el corte de los dos planos, en forma general, es directamente → $s:\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix}$

Si la pasamos a paramétrica, la incógnita que no aparece en la ecuación general es el parámetro libre, por lo tanto → $s:\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$

Del apartado anterior sabemos que $r:\begin{Bmatrix} x=2-a \\ y=2+3a \\ z=1+a \end{Bmatrix}$

Para estudiar la posición relativa de dos rectas necesitamos un vector director de cada recta y un punto de cada recta.

$\vec{u}_r=(-1,3,1)$, $A(2,2,1)\in r$, $\vec{v}_s=(0,0,1)$, $B(0,0,0)\in s$

$\vec{BA}=(2,2,1)$

Y estudiamos el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y por el vector $\vec{BA}$. El rango lo vamos a estudiar por determinantes, recordando que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ → Resolvemos por Sarrus → $|M|=0+0+6-(0+0-2)=8\neq 0$

El rango es 3, por lo que los tres vectores son linealmente independientes. Las rectas son cruzadas.