Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 25 - distancias

1. Calcula el valor de a **para que la recta** $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$ **no corte al plano** $\Pi: 5x+ay+4z=5$ **. Para ese valor de** a **calcula la distancia de la recta al plano.**

Una recta y un plano no se cortan si el sistema formado por ambas ecuaciones no tiene solución.

Podemos resolver este problema de dos maneras.

La primera es pasar la ecuación de la recta a general y realizar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas con la ecuación general del plano. Si el sistema no tiene solución, significa que recta y plano no se cortan.

La segunda es pasar la recta a paramétrica y sustituir en la ecuación del plano, quedando una ecuación con incógnita única el parámetro libre de la recta. Si llegamos a un absurdo, significará que recta y plano nos e cortan.

Resolvamos el ejercicios por este segundo método.

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4} \quad \rightarrow \quad r: \begin{Bmatrix} x=2t \\ y=2+6t \\ z=2-4t \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sustituimos en} \quad \Pi: 5x+ay+4z=5$$

$$5(2t)+a(2+6t)+4(2-4t)=5 \quad \rightarrow \quad 10t+2a+6at+8-16t-5=0$$

$$6at-6t+2a+3=0 \quad \rightarrow \quad (6a-6)t=-2a-3 \quad \rightarrow \quad t=\frac{-2a-3}{6a-6}$$

Podremos obtener un valor del parámetro t siempre que el denominador sea distinto de cero, en cuyo cayo tendríamos un absurdo matemático y no habría solución (por lo que recta y plano no se cortarían).

$$6a-6=0 \quad \rightarrow \text{Recta y plano son paralelos si} \quad a=1 \quad \rightarrow \quad \Pi: 5x+y+4z=5$$

La distancia de una recta a un plano, siendo ambos paralelos, es la distancia de un punto cualquiera de la recta a dicho plano. De la ecuación paramétrica de la recta es obvio que el punto $P(0,2,2)$ pertenece a la recta.

Usando la fórmula de la distancia de punto a plano:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{5\cdot 0+1\cdot 2+4\cdot 2-5}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}\right|=\left|\frac{5}{\sqrt{41}}\right|=\frac{5\sqrt{41}}{41}\ u$$

2. Considera el punto $P(-1,0,1)$ y el plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Calcule:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano Π .

b) La distancia del punto P al plano Π .

a) Para obtener una recta necesitamos un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.

El punto es, según el enunciado, $P(-1,0,1)$.

El vector director de la recta debe ser, según el enunciado, perpendicular al plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Por lo que podemos tomar el vector normal al plano como vector director.

$$\vec{u_\Pi}=(1,-1,1) \rightarrow r: \begin{Bmatrix} x=-1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

b) Para obtener la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ podemos hacer uso de la fórmula:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Aplicado a los datos del enunciado → $d(P,\Pi)=\left|\frac{1\cdot(-1)-1\cdot 0+1\cdot 1+2}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$

3. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ **y** $s: \left\{ \begin{array}{c} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{array} \right\}$ **.**

a) Determine su posición relativa.

b) Calcule la distancia del punto $P(2,3,1)$ **a la recta** s **.**

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas debemos obtener sus respectivos vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \quad \rightarrow \quad \vec{u}_r=(2,3,1) \quad , \quad A \in r=(0,0,0)$$

$$s: \left\{ \begin{array}{c} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \vec{u}_s=(-1,2,2) \quad , \quad B \in s=(0,1,-2)$$

$$\vec{AB}=(0,1,-2)$$

El rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ nos informará del número de vectores linealmente independientes y, según este valor, podremos determinar la posición relativa de las rectas.

Calculamos el determinante de la matriz 3x3 formada por $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$. Si es no nulo, el rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8-1+0-(0+4+6) = -19 \neq 0 \quad \rightarrow \text{Rango 3}$$

Si los tres vectores son linealmente independientes significan que las dos rectas son cruzadas en el espacio.

b) Para obtener la distancia desde un punto $P(2,3,1)$ a la recta s podemos aplicar la fórmula que vimos en teoría o bien razonar de la siguiente manera.

Elegimos un punto arbitrario de la recta s , cuyas coordenadas serán las de la recta en paramétricas.

$$s: \left\{ \begin{array}{c} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad Q(-\lambda, 1+2\lambda, -2+2\lambda) \quad \rightarrow \text{Punto arbitrario de } s$$

Formamos el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2, -2+2\lambda, -3+2\lambda)$. El módulo del vector $\vec{PQ}$ será la distancia buscada siempre que el producto escalar de $\vec{PQ}$ con el vector director $\vec{u}_s=(-1,2,2)$ sea nulo (ya que los dos vectores serán perpendiculares).

$$\vec{PQ}\cdot\vec{u}_s=0 \;\rightarrow\; -(-\lambda-2)+2(-2+2\lambda)+2(-3+2\lambda)=0 \;\rightarrow\; \lambda+2-4+4\lambda-6+4\lambda=0$$

$$9\lambda-8=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{8}{9}$$

Con este resultado podemos obtener el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2,-2+2\lambda,-3+2\lambda)$.

$$\vec{PQ}=(\frac{-8}{9}-2,-2+\frac{16}{9},-3+\frac{16}{9})=(\frac{-26}{9},-\frac{2}{9},-\frac{11}{9})$$

$$d(P,s)=|\vec{PQ}|=\sqrt{\frac{676+4+121}{81}}=\sqrt{\frac{801}{81}}=\sqrt{\frac{89}{9}}\;u$$

4. Sea la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de r y s .

a) Si la recta s es paralela a r , tendrán el mismo vector director. Y si s pasa por $C(-2,3,2)$, ya tendremos un punto y un vector para obtener la ecuación de la recta.

$$\vec{u}_s=\vec{u}_r=\vec{AB}=(-2,1,1) \quad , \quad C(-2,3,2)\in s \quad \rightarrow \quad s:\left\{\begin{matrix} x=-2-2a \\ y=3+a \\ z=2+a \end{matrix}\right\}$$

b) La distancia entre dos rectas paralelas podemos obtenerla como la distancia de un punto $A\in r$ a la otra recta s .

Podemos obtener la distancia con la fórmula $d(P,s)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}$, donde $\vec{u}_s$ es el vector director de la recta s y $P\in s$ un punto de dicha recta.

$$A(1,0,-1)\in r \quad , \quad P(-2,3,2)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{AP}=(-3,3,3)$$

$$\vec{u}_s=(-2,1,1) \quad \rightarrow \quad |\vec{u}_s|=\sqrt{6}$$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}-(-6\hat{k}+3\hat{i}-3\hat{j})=-3\hat{j}+3\hat{k}=(0,-3,3)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_s|=\sqrt{18}$$

$$d(P,s)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}\,u$$

5. a) Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$ **.**

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición entre ambas rectas vamos a tomar los siguientes elementos geométricos.

Punto y director de la primera recta → $A\ ,\vec{u}_r$

Punto y vector director de la segunda recta → $B\ ,\vec{u}_s$

Vector formado por los puntos obtenidos → $\vec{AB}$

El estudio del rango de la matriz formada por estos tres vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ nos dará la información necesaria para determinar la posición relativa de las rectas.

Pasamos las rectas, en forma general, a paramétricas.

$$r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{cases}$$ → Restamos las dos ecuaciones →

$$-x=-\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=1 \rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow A(0,1,0)\ ,\ \vec{u}_r=(1,0,1)$$

$$s:\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=6$$

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=6 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow B(0,6,0)\ ,\ \vec{u}_s=(1,0,1)$$

$$\vec{AB}=(0,-5,0)$$

$$(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow det=0+0-5-(0+0-5)=0 \rightarrow Rango\neq 3$$

Buscamos un menor de orden dos no nulo → $|\alpha_{11}|=0+5=5 \rightarrow Rango=2$ → Tenemos dos vectores linealmente independientes, por lo tanto la terna $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ está contenida en un mismo plano. Esta configuración puede implicar que las rectas sean paralelas o secantes. Para decidirlo, debemos ver el rango de los dos vectores directores → $(\vec{u}_r, \vec{u}_s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Son vectores proporcionales, por lo que las rectas son paralelas.

b) La distancia entra ambas rectas paralelas podemos determinarla con la fórmula $d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$, sabiendo que:

$\vec{u}_r$ → Vector director de la recta r → $\vec{u}_r=(1,0,1)$

A → Punto de la recta r → $A(0,1,0)$

P → Punto de la recta s → $P(0,6,0)$

$\vec{AP}=(0,-5,0)$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -5 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-5\hat{i}+0+0-(-5\hat{k}+0+0)=-5\hat{i}+5\hat{k}=(-5,0,5)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_r|=\sqrt{25+0+25}=\sqrt{50}$$

$$|\vec{u}_r|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5\ u$$

6. Sea la recta $r:\left\{\begin{matrix}3x+2y=0\\3x+z=0\end{matrix}\right\}$ **.**

a) Determina el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ **.**

b) Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.

a) Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de la recta será igual al vector normal del plano. Pasamos la ecuación general de la recta a paramétricas para obtener su vector director.

$$r:\left\{\begin{matrix}3x+2y=0\\3x+z=0\end{matrix}\right\} \rightarrow x=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix}y=\frac{-3}{2}\lambda\\z=-3\lambda\end{matrix}\right\} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix}x=\lambda\\y=\frac{-3}{2}\lambda\\z=-3\lambda\end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(1,-\frac{3}{2},-3)$$

Podemos tomar como vector director uno proporcional al obtenido, con objeto de no operar con fracciones. Por ejemplo $\vec{u}_r=(2,-3,-6) \rightarrow \vec{u}_\Pi=(2,-3,-6) \rightarrow \Pi:2x-3y-6z+D=0$.

El término independiente se obtiene con la condición de que el plano pase por el punto $P(1,1,1)$.

$$P\in\Pi \rightarrow 2-3-6+D=0 \rightarrow D=7 \rightarrow \Pi:2x-3y-6z+7=0$$

b) Tomamos un punto arbitrario de la recta, y forzamos que su distancia al origen de coordenadas sea igual a 4. El punto arbitrario lo tomamos de la ecuación paramétrica de la recta.

$r:\left\{\begin{matrix}x=\lambda\\y=\frac{-3}{2}\lambda\\z=-3\lambda\end{matrix}\right\}$ → Punto arbitrario de la recta $A(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda)$

$$O(0,0,0) \rightarrow \vec{AO}=(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\lambda^2+\frac{9}{4}\lambda^2+9\lambda^2}=4 \rightarrow \sqrt{\frac{50}{4}\lambda^2}=4$$

$$\sqrt{50\lambda^2}=8 \rightarrow 50\lambda^2=64 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{64}{50}} \rightarrow \lambda=\frac{\pm8}{5\sqrt{2}}=\frac{\pm4\sqrt{2}}{5}$$

Puntos solución → $A_1(\frac{4\sqrt{2}}{5},-\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{-12\sqrt{2}}{5})$, $A_2(\frac{-4\sqrt{2}}{5},\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{12\sqrt{2}}{5})$

7. Sea el punto $A(1,-2,1)$ **y la recta** $r:\left\{\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por A **.**

b) Calcula la distancia del punto A **a la recta** r **.**

a) Si el plano es perpendicular a la recta r , el vector normal del plano será paralelo al vector director de la recta.

Podemos obtener este vector director haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que forman la recta en su forma general.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}=(1,1,0),\vec{v}=(2,1,1) \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+\hat{k}-(2\hat{k}+0+\hat{j})$$

$$\vec{u_\Pi}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}=(1,-1,-1)$$

Si tenemos el vector director del plano, su ecuación general será → $\Pi: x-y-z+D=0$

El término independiente lo sacamos forzando que el plano pase por el punto $A(1,-2,1)$.

$$A\in\Pi \rightarrow 1+2-1+D=0 \rightarrow D=-2 \rightarrow \Pi: x-y-z-2=0$$

b) Para obtener la distancia del punto a la recta buscamos un punto arbitrario de la recta. Para ello, pasamos la recta en forma general a paramétrica.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+y=7-\lambda \end{matrix}\right\}$$ → Restamos ambas ecuaciones

$$-x=-5+\lambda \rightarrow x=5-\lambda \rightarrow y=2-x \rightarrow y=-3+\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=5-\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

Un punto arbitrario de la recta será $P(5-\lambda,-3+\lambda,\lambda)$. Vamos a pedir que el vector $\vec{AP}$ sea perpendicular a la recta r . Si esto se cumple, el módulo del vector $\vec{AP}$ nos dará la distancia mínima del punto a la recta.

$$A(1,-2,1) \ , \ P(5-\lambda,-3+\lambda,\lambda) \rightarrow \vec{AP}=(4-\lambda,-1+\lambda,\lambda-1)$$

$$\vec{u}_r=(-1,1,1)$$

Los dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{AP}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (-4+\lambda)+(-1+\lambda)+(\lambda-1)=0 \rightarrow -6+3\lambda=0 \rightarrow \lambda=2$$

Por lo tanto → $\vec{AP}=(2,1,1) \rightarrow d(A,r)=|\vec{AP}|=\sqrt{6}\ u$

8. Sean las rectas $r:\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{Bmatrix}$ **y** $s:\begin{Bmatrix} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{Bmatrix}$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en ambas rectas, calcula su área.

Dos rectas en el espacio tridimensional son coplanarias si son paralelas, secantes o coincidentes.

Si tomamos un vector director de cada recta, y un tercer vector con origen un punto de r y fin un punto de s, y estudiamos el rango de la matriz formada por esos tres vectores, este rango debe ser distinto de 3 para rectas coplanarias (los tres vectores no pueden ser linealmente independientes).

$$r:\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_r=(2,-1,0)$$

$s:\begin{Bmatrix} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{Bmatrix}$ → Pasamos a paramétricas → $s:\begin{Bmatrix} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(-2,1,0)$

Es directo que ambos vectores directores son proporcionales → $\vec{u}_r=-\vec{u}_s$, por lo tanto necesariamente las rectas serán paralelas o coincidentes, por lo que pertenecerán al mismo plano. Son coplanarias.

Aunque no lo pide el ejercicio, para practicar, vamos a determinar si son paralelas o coincidentes. P podemos obtener el vector $\vec{AB}$ con $A\in r$ y $B\in s$. Por ejemplo, de las ecuaciones paramétricas → $A(1,1,1)$, $B(-1,0,-1)$ → $\vec{AB}=(-2,-1,-2)$.

Es directo comprobar que $\vec{AB}$ no es proporcional a $\vec{u}_r=(2,-1,0)$, ya que sus respectivas componentes no cumplen la misma regla de proporción → $\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{-2}$ → $\vec{AB}$ y $\vec{u}_r$ son linealmente independientes, por lo que las rectas son paralelas.

Con dos vectores linealmente independientes del plano y un punto del plano, podemos aplicar la determinación lineal del plano para obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{AB},B) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+1 \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z+1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -2(z+1)+0+2(x+1)-(0-4y+2(z+1))=0$$

$$2(x+1)+4y-4(z+1)=0$$

$\Pi: 2x+4y-4z-2=0$ → Simplificamos → $\Pi: x+2y-2z-1=0$

b) Al ser las rectas paralelas y descansar dos lados del cuadrado sobre ambas rectas, y recordando que un cuadrado tiene sus cuatro lados iguales, la longitud de un lado será igual a la distancia entre ambas rectas. Por lo tanto, el área del cuadrado será $[d(r,s)]^2$.

Para obtener la distancia entre ambas rectas tomamos un punto $A(1,1,1)\in r$ y un punto arbitrario de la recta s a partir de su ecuación paramétrica → $Q(-1-2\lambda,\lambda,-1)\in s$.

El vector $\vec{AQ}=(-2-2\lambda,\lambda-1,-2)$ será perpendicular al vector director de la recta s si el producto escalar de ambos vectores es nulo. Y si ambos vectores son perpendiculares, el módulo de $\vec{AQ}$ coincidirá con la distancia que separan ambas rectas.

$$\vec{AQ}\cdot\vec{u}_s=(-2-2\lambda,\lambda-1,-2)\cdot(-2,1,0)=0 \ \rightarrow \ 4+4\lambda+\lambda-1+0=0$$

$$5\lambda+3=0 \ \rightarrow \ \lambda=\frac{-3}{5} \ \rightarrow \ \vec{AQ}=(-2+\frac{6}{5},\frac{-3}{5}-1,-2)=(\frac{-4}{5},\frac{-8}{5},-2)$$

$$d(r,s)=|\vec{AQ}|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}+4}=\sqrt{\frac{180}{25}}=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5} \ \ u$$

Área del cuadrado solución → $A=[d(r,s)]^2=\frac{36}{5}=7{,}2 \ \ u^2$

9. Sean las rectas $r: \left\{ \begin{matrix} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{matrix} \right\}$ **y** $s: \left\{ \begin{matrix} x+y=0 \\ z=1 \end{matrix} \right\}$ **.**

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Hallar, si es posible, la ecuación de un plano paralelo a r **que contiene a** s **.**

c) Obtener la mínima distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos hacerlo estudiando el sistema de los cuatro planos que aparecen en la forma implícita de ambas rectas, o bien pasar a paramétrica y trabajar con los vectores directores.

Como tenemos las rectas en forma implícita, estudiaremos la solución del siguiente sistema (en notación matricial).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de M , con el siguiente menor de orden 3.

$$|F_2 F_3 F_4|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2+0+0-(0+0-2)=4\neq 0 \rightarrow rango(M)=3$$

Estudiamos el rango de M/D con el siguiente determinante de orden 4.

$$|M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow C'_4=C_4-C_3 \rightarrow |M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la fila F_4 .

$$|M/D|=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-(0-1+2-(-2+1+0))=-(1+1)=-2\neq 0 \rightarrow rango(M/D)=4$$

Si $rango(M)=3\neq 4=rango(M/D)$ → No hay solución → Sistema Incompatible → Las rectas son cruzadas.

Para practicar, vamos a comprobar que obtenemos el mismo resultado si pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y trabajamos con los vectores directores.

$$r:\left\{\begin{matrix} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x-y=2-\lambda \\ 2x-2y=2-\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} 2x-2y=4-2\lambda \\ 2x-2y=2-\lambda \end{matrix}\right\}$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$4-2\lambda=2-\lambda \rightarrow \lambda=2 \rightarrow z=2$$

Tomamos otra incógnita como parámetro. Por ejemplo $y=\lambda$. Así:

$$x-\lambda+2=2 \rightarrow x=\lambda$$

La recta r en paramétricas resulta:

$$r=\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{matrix}\right\}$$ → Punto de la recta $A(0,0,2)$. Vector director $\vec{u}_r=(1,1,0)$.

Trabajamos ahora con la segunda recta.

$$s:\left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow y=\lambda \rightarrow x=-\lambda$$

La recta s en paramétricas resulta:

$$s=\left\{\begin{matrix} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{matrix}\right\}$$ → Punto de la recta $B(0,0,1)$. Vector director $\vec{u}_s=(-1,1,0)$.

El vector formado por los puntos obtenidos de las rectas resulta: $\vec{AB}=(0,0,-1)$.

Así, debemos estudiar el rango de la matriz formada por los vectores columnas $\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}$.

$$\{\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}\}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}|=-1+0+0-(0+0+1)=-2\neq 0$$

Es decir: $rango(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})=3$ → Los tres vectores son linealmente independientes → Las rectas son cruzadas.

b) Debemos obtener un plano paralelo a r que contiene a s .

Para obtener la ecuación paramétrica de un plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes pertenecientes al plano.

Un punto puede ser $B(0,0,1)$, calculado en el apartado anterior y que pertenece a s . Un vector puede ser el vector director de s → $\vec{u}_s=(-1,1,0)$. Un segundo vector será el vector director de r → $\vec{u}_r=(1,1,0)$. Ambos sean linealmente independientes, como demostramos en el apartado anterior, y además garantizamos obtener un plano paralelo a la recta r .

Por la determinación lineal del plano, podemos obtener la ecuación general resolviendo el siguiente determinante.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B):\begin{vmatrix}1 & -1 & x\\ 1 & 1 & y\\ 0 & 0 & z-1\end{vmatrix}=0 \rightarrow z-1+0+0-(0+0+1-z)=0 \rightarrow 2z-2=0$$

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B): z=1$$

c) La distancia mínima entre ambas rectas coincide con la distancia medida desde la recta r al plano obtenido en el apartado anterior, que es paralelo a r y contiene a la recta s .

Podemos tomar cualquier punto de la recta r y obtener la distancia al plano $\Pi: z=1$.

El punto $A(0,0,2)\in r$ y podemos hacer uso de la expresión general de la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow d(A,\Pi)=\frac{|1\cdot 2-1|}{\sqrt{1}}=1 \quad u$$

10. Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ **y la recta** $r:\left\{\begin{matrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano.

b) Calcula la distancia de la recta al plano.

c) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r **y es perpendicular a** Π **.**

a) Vamos a formar un sistema con las dos ecuaciones que forman la ecuación implícita de la recta y con la ecuación general del plano. Será un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 3x+y+z=6 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Según la solución de este sistema, podremos concluir la posición relativa de la recta y el plano.

El determinante de la matriz del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+0+2-(1+0-2)=0 \rightarrow \text{El rango de la matriz del sistema no es 3}$$

Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → El rango de la matriz del sistema es 2.

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada. Primero buscamos si existe al menos un menor de orden 3 no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0+2-6-(0-2+1)=-3\neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Por lo tanto:

$rango(A)=2\neq 3=rango(A/C)$ → Sistema sin solución según el Teorema de Roché-Frobenius → Sistema incompatible → La recta es paralela al plano.

b) Para calcular la distancia de la recta al plano podemos tomar un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ cualquiera de la recta y aplicar la expresión:

$$d(P,\Pi)=\frac{|A x_0+B y_0+C z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Para obtener un punto de la recta podemos pasar de la forma implícita a paramétricas.

$$r:\left\{\begin{matrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=2-2\lambda \ , \ z=4-\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{matrix}\right\}$$

Un punto de la recta es $P(0,2,4)$.

Y la distancia al plano $\Pi: x+y-z-1=0$ resulta:

$$d(P,\Pi)=\frac{|0+2-4-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\ \ u$$

c) Finalmente buscamos un plano que contenga a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{matrix}\right\}$ y sea perpendicular al plano $\Pi: x+y-z-1=0$.

Podemos obtener un plano con un punto y con dos vectores linealmente independientes que pertenezcan al plano.

El punto es $P(0,2,4)$, que pertenece a la recta y, en consecuencia, pertenece al plano.

Uno de los vectores es el vector directo de la recta → $\vec{u}_r=(1,-2,-1)$.

Y el segundo vector podría ser el vector normal del plano Π , que por ser perpendicular al plano pertenecerá en consecuencia al plano que estamos buscando (que es perpendicular a Π). Este razonamiento nos sirve siempre y cuando el vector normal $\vec{u}_\Pi=(1,1,-1)$ sea linealmente independiente respecto al vector $\vec{u}_r=(1,-2,-1)$.

Ambos vectores son linealmente independientes, ya que no son proporcionales, como puede verse de los cocientes de sus componentes respectivas.

$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{u}_\Pi,P):\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & -2 & y-2 \\ -1 & -1 & z-4 \end{vmatrix}=0 \ \rightarrow\ \Pi: x+z-4=0$$

11. Sean los puntos $A(1,2,-1)$, $P(0,0,5)$, $Q(1,0,4)$ y $R(0,1,6)$.

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A , es paralela al plano que pasa por los puntos P,Q y R y tal que la primera componente de su vector director es doble de la segunda.

b) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por P,Q y R .

a) Si los puntos P,Q y R pertenecen a un plano, los siguientes vectores pertenecerán a dicho plano.

$$\vec{PQ}=(1,0,-1) \quad , \quad \vec{PR}=(0,1,1)$$

Por la determinación lineal del plano, su ecuación general será:

$$\Pi(\vec{PQ},\vec{PR},P):\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z-5 \end{vmatrix}=0 \rightarrow z-5+0+0-(-x+y+0)=0 \rightarrow \Pi: x-y+z-5=0$$

Este plano es paralelo a la recta r que buscamos, que además pasa por el punto $A(1,2,-1)$.

El vector director de esta recta solución será $\vec{u}_r=(x,y,z)$, y el enunciado nos dice que la primera componente de este vector director es doble de la segunda. Es decir:

$$\vec{u}_r=(2y,y,z)$$

Un vector perpendicular al plano Π también será perpendicular al vector director $\vec{u}_r$. Es decir, el vector normal del plano $\vec{u_\Pi}=(1,-1,1)$ será perpendicular a $\vec{u}_r$ y el producto escalar de ambos será nulo.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u_\Pi}=(1,-1,1)\cdot(2y,y,z)=0 \rightarrow 2y-y+z=0 \rightarrow y+z=0 \rightarrow z=-y \quad .$$

Por lo tanto, el vector director de la recta solución resulta:

$\vec{u}_r=(2y,y,-y)$ → Cualquier valor de y no nulo nos ofrece un vector director de la recta (de los infinitos vectores directores que existen). Por ejemplo $y=1 \rightarrow \vec{u}_r=(2,1,-1)$.

Y con un vector y un punto tenemos la ecuación en paramétricas de la recta solución:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1+2\beta \\ y=2+\beta \\ z=-1-\beta \end{matrix}\right\}$$

b) Para obtener la distancia de un punto $P(x_{0,}y_0,z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ hacemos uso de la siguiente expresión.

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Aplicado al punto $A(1,2,-1)$ y al plano de ecuación general $\Pi: x-y+z-5=0$, resulta:

$$d(P,\Pi)=\frac{|1-2+-1-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{7\sqrt{3}}{3} \quad u$$

12. Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano Π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a) Calcula el punto simétrico del punto respecto del plano.

b) Calcula la distancia del punto al plano.

a) De la ecuación general del plano obtenemos su vector característico, perpendicular al plano: $\vec{u}=(3,2,1)$

Trazamos la recta que pasa por $P(2,-1,3)$ y con vector director $\vec{u}=(3,2,1)$ $\rightarrow$ $r:\left\{\begin{array}{c} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=3+t \end{array}\right\}$

Esta recta es perpendicular al plano. Obtenemos el punto de corte de recta y plano, llevando la ecuación paramétrica de la recta dentro de la ecuación general del plano:

$$3(2+3t)+2(-1+2t)+(3+t)=5 \rightarrow 6+9t-2+4t+3+t=5 \rightarrow 14t=-2 \rightarrow t=\frac{-1}{7}$$

Llevando el valor del parámetro a la recta, sacamos el punto de corte de recta y plano:

$$A(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})$$

Este punto es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, donde $P'(x',y',z')$ es el simétrico de $P(2,-1,3)$ respecto el plano. Como el punto medio es la semisuma de las componentes:

$$(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})=(\frac{2+x'}{2},\frac{-1+y'}{2},\frac{3+z'}{2})$$

Igualando componentes:

$x'=\frac{8}{7}$, $y'=\frac{-11}{7}$, $z'=\frac{19}{7}$ → El punto solución es $P'(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7})$

b) Finalmente, la distancia de punto a plano podemos obtenerla con la expresión que relaciona las coordenadas del punto (x_0,y_0,z_0) y la ecuación general del plano $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{2}{7}}u$$

13. Sea la recta $r:\left\{\begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{matrix}\right\}$ **. Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.**

Tomamos un punto arbitrario de la recta, y forzamos que su distancia al origen de coordenadas sea igual a 4. El punto arbitrario lo tomamos de la ecuación paramétrica de la recta.

$r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\frac{-3}{2}\lambda \\ z=-3\lambda \end{matrix}\right\}$ → Punto arbitrario de la recta $A(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda)$

$O(0,0,0) \rightarrow \vec{AO}=(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\lambda^2+\frac{9}{4}\lambda^2+9\lambda^2}=4 \rightarrow \sqrt{\frac{50}{4}\lambda^2}=4$

$\sqrt{50\lambda^2}=8 \rightarrow 50\lambda^2=64 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{64}{50}} \rightarrow \lambda=\frac{\pm 8}{5\sqrt{2}}=\frac{\pm 4\sqrt{2}}{5}$

Puntos solución → $A_1(\frac{4\sqrt{2}}{5},-\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{-12\sqrt{2}}{5})$, $A_2(\frac{-4\sqrt{2}}{5},\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{12\sqrt{2}}{5})$