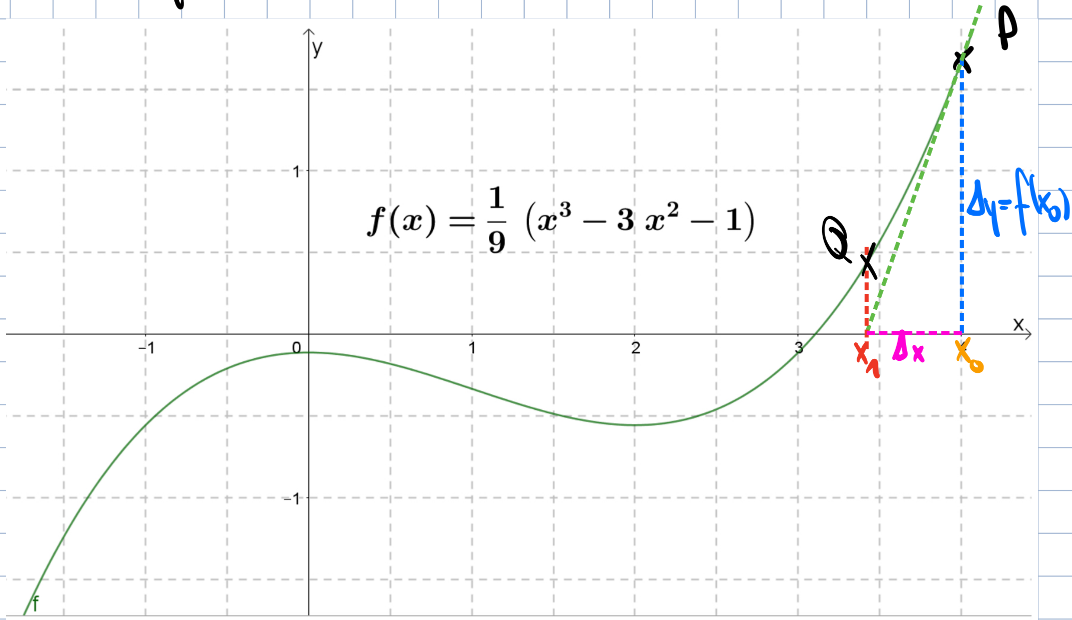
3. Newton-Verfahren

Funktionen von Grad 3 haben keine Lösungsformel, weshalb wir eine Nullstelle raten müssten.
Einen Ausweg liefert das (numerische!) Newton-Verfahren:



① Wähle einen Startpunkt $P(x_0 \mid f(x_0))$

② Zeichne die Tangente an G_f durch P ein

③ Der Schnittpunkt der Tangenten und der x-Achse ist x_1

④ Beginne von vorn mit $Q(x_1 \mid f(x_1))$

Nach der Definition der Ableitung gilt nun

$$f'(x_0) = m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

MERKE

Ist f eine differenzierbare Funktion und $P(x_0 \mid f(x_0))$ kein kritischer Punkt auf den Graphen, so kann die Nullstelle schrittweise durch nacheinander Einsetzen in die Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

genähert werden.

Beispiel: $x_0 = 4$; $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (x^3 - 3x^2 - 1)$; $f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 6x)$

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{\frac{15}{9}}{\frac{24}{9}} = 4 - \frac{15}{24} = 3{,}375 = \frac{27}{8}$$

↳ $$x_2 = \frac{27}{8} - \frac{f(\frac{27}{8})}{f'(\frac{27}{8})} = \frac{27}{8} - \frac{0{,}36}{1{,}55} \approx 3{,}14$$

Nullstelle liegt tatsächlich bei ca. 3,1038...