DOCUMENTS PROFESSEUR – TROIS CERCLES TANGENTS

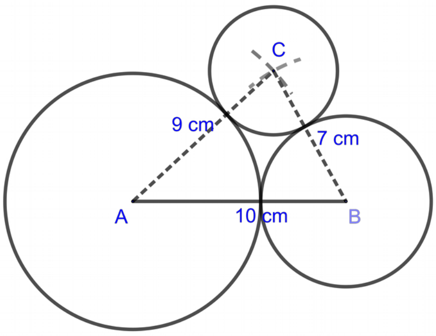
CONTENUS MATHEMATIQUES	
On considère un segment [AB] de longueur 10 cm et deux cercles de centres respectifs A et B, de rayons respectifs 6 cm et 4 cm. On dit de ces deux cercles qu'ils sont tangents (ils n'ont qu'un seul point en commun). Comment construire un troisième cercle, de centre C et de rayon 3 cm, pour qu'il soit tangent aux deux autres ?	
6	Cercle et rayon Construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses côtés
5	Cercle et rayon Construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses côtés Utilisation de l'inégalité triangulaire Écriture et comparaison d'expressions littérales
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(0;0) et B(10;0) ainsi que deux cercles tangents, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs 6 et 4 unités. Comment construire un troisième cercle, de centre C et de rayon *r*, pour qu'il soit tangent aux deux autres ?	
1S	Cercle et rayon Construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses côtés Équation de cercle Calcul littéral, exprimer une grandeur variable en fonction d'une autre Courbe des points associés à une égalité Factorisation d'une expression du second degré Domaine de définition d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$

SOLUTIONS

6[e]

1► La recherche sur GeoGebra mène à remarquer que les cercles sont tangents lorsque AC = 6+3 = 9 cm et BC = 4+3 = 7 cm.

2► Construction à la règle et au compas du point C.

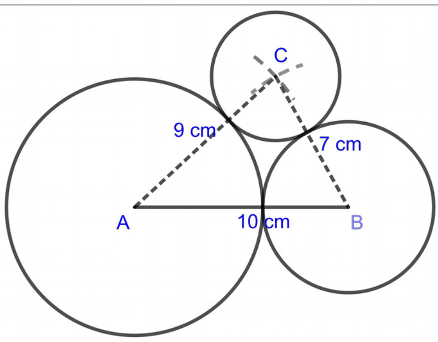


5[e]

1► La recherche sur GeoGebra mène à remarquer que les cercles sont tangents lorsque AC = 6+3 = 9 cm et BC = 4+3 = 7 cm.
On effectue donc à la règle et au compas la construction du point C.

2► Prenons par exemple les rayons de cercles suivants : 12 cm, 3 cm, 4 cm :
AB = 12+3 cm = 15 cm ; AC = 12+4 = 16 cm ; BC = 3+4 = 7 cm.
Le plus grand côté est [AC] et AB + BC = 15+7 = 22 cm.
On constate que AC < AB+BC. Donc, selon la propriété de l'inégalité triangulaire, le triangle pourra être construit (et les cercles aussi).

3► Écrivons les longueurs des 3 côtés du triangle :
AB = a+b   AC = a+c   BC = b+c
Puisque a > b > c, le plus grand côté est [AB] et AC + BC = a+c+b+c = a + b + 2c
On constate que AB < AC+BC. Donc, selon la propriété de l'inégalité triangulaire, le triangle pourra être construit (et les cercles aussi).



1^eS

1► La recherche sur GeoGebra mène à remarquer que les cercles sont tangents lorsque AC = 6+*r* et BC = 4+*r*.

2► C_A est le cercle de centre A et de rayon 6+*r* ; C_B est le cercle de centre B et de rayon 4+*r* ; les deux cercles sont sécants en C. En faisant varier *r*, on constate que le point C semble décrire une branche d'hyperbole.

3► Équation des cercles : C_A : $x^2 + y^2 = (6+r)^2$ C_B : $(x-10)^2 + y^2 = (4+r)^2$

Après développement et soustraction membre à membre de ces deux équations, on obtient l'égalité : $20x - 100 = 20 + 4r$, soit : $\underline{r = 5x - 30}$.

Et donc, en reprenant l'équation de C_A : $x^2 + y^2 = 36 + 12(5x - 30) + (5x - 30)^2$,

soit, après développement et réduction : $y^2 = 24x^2 - 240x + 576$

Saisir cette égalité sur GeoGebra permet d'afficher la courbe des points qui la vérifient.

4► $24x^2 - 240x + 576 = 24\,(x^2 - 10x + 24)$.

Pour factoriser cette expression, il faut déterminer les racines du trinôme.

$\Delta = 4$. Le trinôme possède donc deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{4}}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{4}}{2} = 6$.

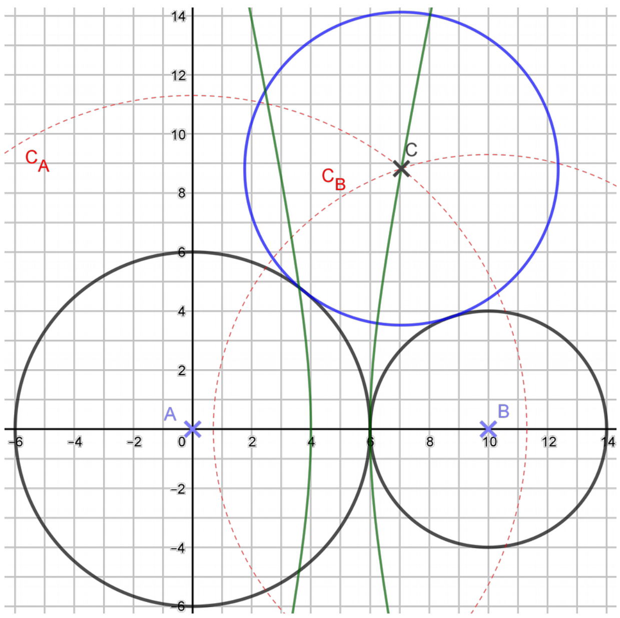
On peut donc écrire : $y^2 = 24\,(x-4)(x-6)$ et donc, pour les branches positives de la courbe, on a $y = \sqrt{24(x-4)(x-6)}$

Domaine de définition :

Le trinôme $x^2 - 10x + 24$ est positif sur la réunion d'intervalles $]-\infty\,;4] \cup [6\,;+\infty[$ et strictement négatif sur $]4\,;6[$.

Donc le domaine de définition de la fonction *f* est $]-\infty\,;4] \cup [6\,;+\infty[$.

Compléments► Cercles tangents extérieurement



Cercles tangents intérieurement