Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 17 - representación de funciones y más asíntotas

1. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$

El dominio de este cociente de polinomios son todos los reales menos $x=-2$, valor que anula al denominador.

Los cortes con los ejes de coordenadas son en $(0,0)$.

La función no es par ni impar.

Asíntota vertical en $x=-2$ $\rightarrow$ $\lim_{x\rightarrow-2^-}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$, $\lim_{x\rightarrow-2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

Asíntota horizontal en $y=1$ $\rightarrow$ $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}$ $\rightarrow$ Indeterminación, de valor 1 por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia x .

La AH en más infinito coincide con la AH horizontal en menos infinito por ser un cociente de polinomios.

Si hay horizontal, no hay asíntota oblicua.

$$f(x)=\frac{x}{x+2} \rightarrow f'(x)=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ $\rightarrow$ $2=0$ $\rightarrow$ Absurdo matemático

No hay puntos críticos, por lo que no hay candidatos a extremos relativos.

Evaluamos la derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-2)$ $\rightarrow$ $f'(-10)>0$ $\rightarrow$ $f(x)$ estrictamente creciente

$(-2,\infty)$ $\rightarrow$ $f'(10)>0$ $\rightarrow$ $f(x)$ estrictamente creciente

La curvatura y puntos de inflexión se estudia con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{-2\cdot2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{-4}{(x+2)^3}$$

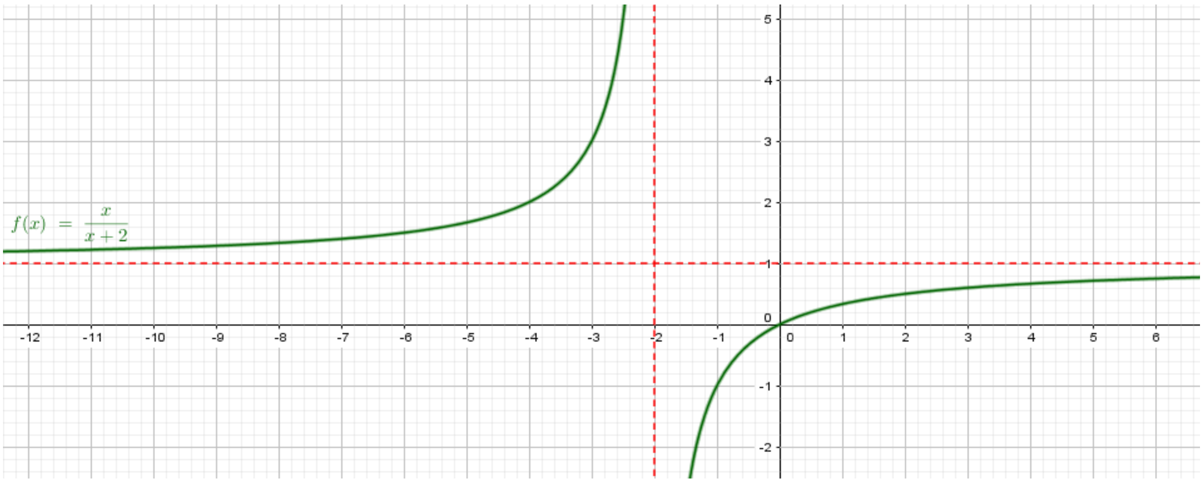
$f''(x)=0$ $\rightarrow$ $-4=0$ $\rightarrow$ Absurdo matemático

No existen candidatos a puntos de inflexión.

Evaluamos la segunda derivada para estudiar la curvatura.

$(-\infty,-2) \;\rightarrow\; f''(-10)>0 \;\rightarrow\; f(x)$ convexa U

$(-2,\infty) \;\rightarrow\; f''(10)<0 \;\rightarrow\; f(x)$ cóncava ∩



2. Estudia las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de $f(x)=\frac{x^2}{x+5}$

Las asíntotas verticales aparecen, en un cociente de polinomios, en los puntos que anulan al denominador.

El dominio de este cociente de polinomios son todos los reales menos el valor $x=-5$.

Estudiamos los límites laterales a la izquierda y a la derecha de $x=-5$.

$\lim_{x\to -5^-}\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to -5^+}\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{0^+}=+\infty$ → Asíntota vertical en $x=-5$

La horizontal requiere del estudio en el infinito de la función.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+5}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es ∞ por ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

Al no existir asíntota horizontal podríamos tener oblicua $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es 1 por ser un cociente de polinomios del mismo grado y por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 de ambos polinomios → $m=1$

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+5}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+5}=\frac{-\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es -5 al aplicar el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia → $n=-5$

La asíntota oblicua resulta $y=x-5$ tanto en más como en menos infinito, al ser un cociente de polinomios la AO coincide en ambos casos.

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x} \quad \rightarrow \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Función impar, ya que $f(x)=-f(-x)$ → Simetría respecto al origen de coordenadas.

La función no corta a los ejes, ya que $x=0$ no pertenece al dominio. Si hacemos $f(x)=0$ → $x^2+1=0$ no tiene solución real.

Asíntota vertical en $x=0$ → $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

No hay asíntota horizontal porque → $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, que tiende a infinito porque el grado del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.

Al no haber horizontal, puede haber oblicua del tipo $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es 1 por ser un cociente de polinomios del mismo grado y por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia de ambos polinomios → $m=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \quad \rightarrow \quad n=0$$

La asíntota oblicua resulta $y=x$ tanto en más como en menos infinito, por ser cociente de polinomios.

Estudiamos el crecimiento con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$ → puntos críticos, candidatos a extremos relativos

Evaluamos los puntos críticos en la segunda derivada, para saber si estamos ante máximos o mínimos.

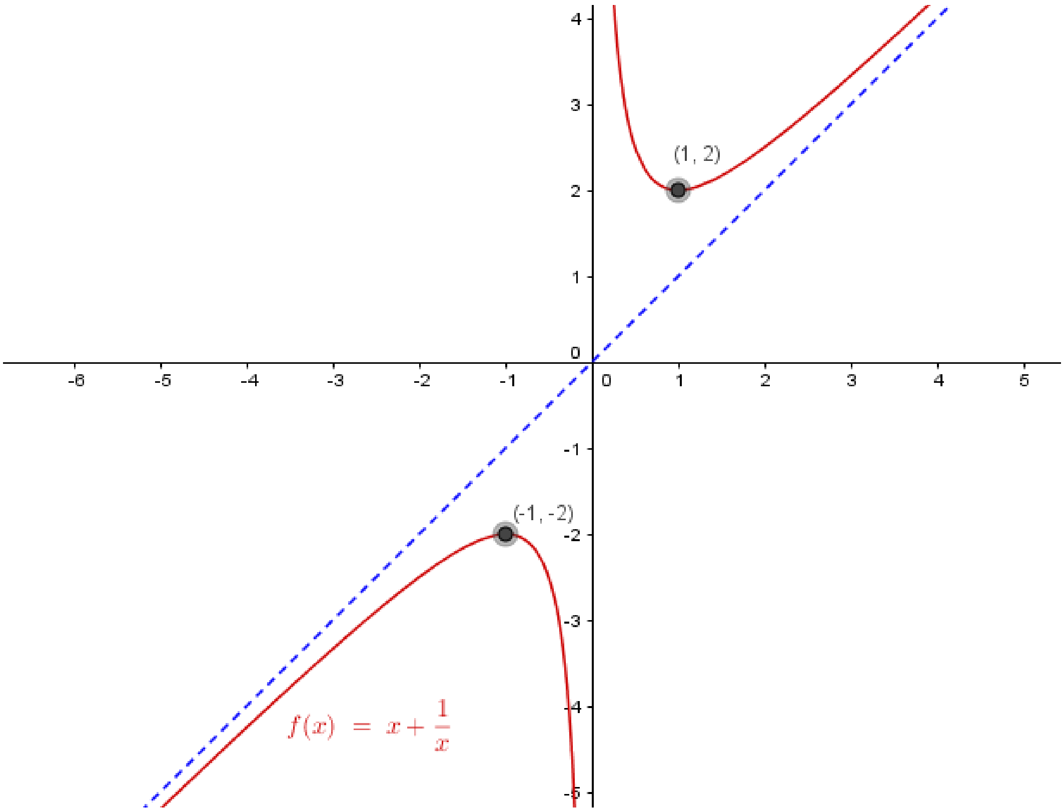
$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f''(x)=\frac{2x(x^2)-(x^2-1)2x}{x^4}=\frac{2x^2-(x^2-1)2}{x^3}=\frac{2}{x^3}$$

$f''(-1)<0 \quad \rightarrow \quad x=-1$ es un máximo relativo → $(-1,f(-1))=(-1,-2)$

$f''(1)>0 \quad \rightarrow \quad x=1$ es un mínimo relativo → $(1,f(1))=(1,2)$

Por último, no tenemos puntos de inflexión ya que la segunda derivada nunca se anula → $f''(x)=0$ → $2=0$ → Absurdo matemático.

Con los extremos calculados, el crecimiento y la ausencia de puntos de inflexión, podemos dibujar la gráfica sin necesidad de estudiar la curvatura.



4. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Cociente de polinomios: el dominio de la función son todos los reales menos $x=\pm 1$ (valores que anulan al denominador).
La función es par, por lo que es simétrica respecto al eje vertical OY.
Corte con los ejes:

$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,1)$
$f(x)=0 \rightarrow 1=0$ → Absurdo matemático → No corta al eje horizontal

Tiene asíntotas verticales en $x=\pm 1$, para lo cual calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-1}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty$$

Tiene asíntota horizontal en $y=0$ en más y en menos infinito, ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$.

Estudiamos el crecimiento:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1} \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=0$$ → punto crítico

En la recta real colocamos el punto crítico $x=0$ y los puntos $x=\pm 1$ que no pertenecen al dominio.

$(-\infty,-1) \rightarrow f'(-10)>0$ → función estrictamente creciente
$(-1,0) \rightarrow f'(-1/2)>0$ → función estrictamente creciente
$(0,1) \rightarrow f'(1/2)<0$ → función estrictamente decreciente
$(1,\infty) \rightarrow f'(10)<0$ → función estrictamente decreciente

Por lo tanto, en $x=0$ tenemos un máximo relativo. Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{-2(x^2-1)^2+2x\cdot 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

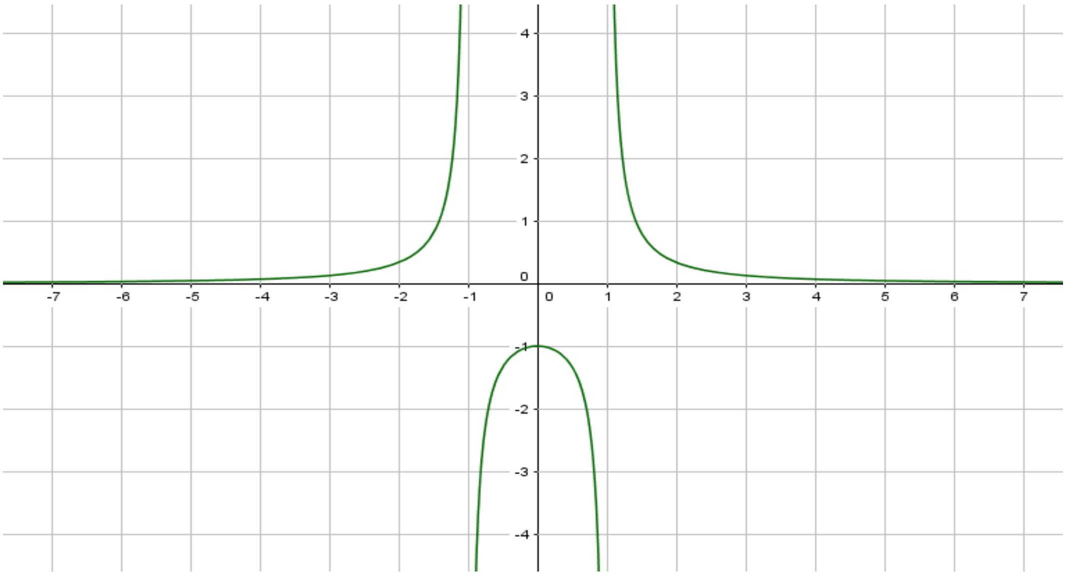
La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero. Por lo tanto:

$6x^2+2=0$ → No existe solución real → No hay puntos de inflexión → En la recta real evaluamos la segunda derivada en los intervalos formados por los puntos donde la función no está definida.

$(-\infty,-1) \rightarrow f'(-10)>0$ → función convexa

$(-1,1) \rightarrow f''(0)<0$ → función cóncava

$(1,\infty) \rightarrow f''(10)>0$ → función convexa


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

5. Estudia y representa $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

El dominio de la función son todos los reales salvo los que hacen negativo o cero el argumento de la raíz, ya que no existen raíces de números negativos ni podemos dividir por cero.

$x^2-1>0$ → Raíces → $x=-1, x=1$ → $Dom(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

La función es par: $f(x)=f(-x)$ → Hay simetría respecto al eje de ordenadas. La función no corta a los ejes, ya que $x=0\notin Dom(f)$ y para $f(x)=0$ → $1=0$ → Absurdo matemático.

Los candidatos a asíntota vertical son los puntos frontera de los intervalos que delimitan el dominio, por lo tanto:

$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists$ → $x=-1$ Asíntota vertical por la izquierda

$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → $x=1$ Asíntota vertical por la derecha

La asíntota vertical se determina estudiando el límite de la función en el infinito.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\infty}=0$ → $y=0$ Asíntota horizontal → No habrá asíntota oblicua

Al ser la función par, también habrá AH $y=0$ cuando x tienda a menos infinito.

Para conocer los extremos relativos y los intervalos de crecimiento, estudiamos la primera derivada.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$f'(x)=0$ → $x=0\notin Dom(f)$ → No existen puntos críticos

Evaluamos la primera derivada en los intervalos del dominio.

$(-\infty,-1)$ → $f'(-100)>0$ → $f(x)$ estrictamente creciente

$(1,\infty)$ → $f'(100)<0$ → $f(x)$ estrictamente decreciente

La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

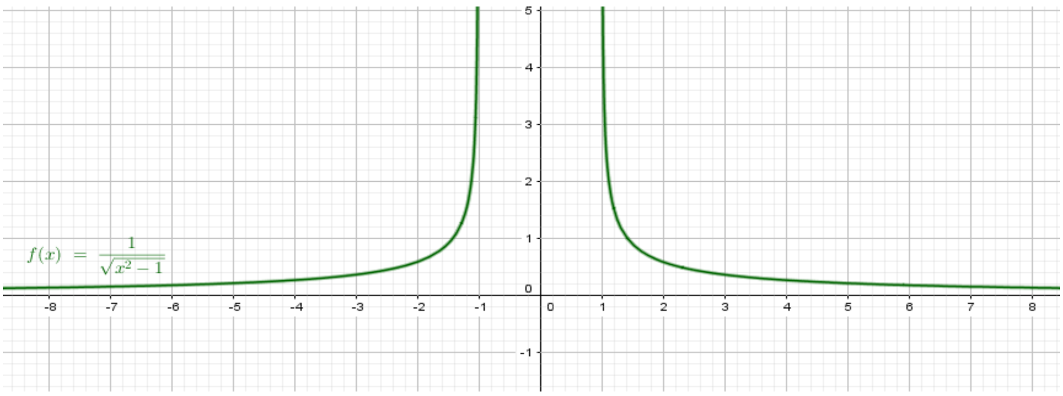
$$f''(x)=\frac{-(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+x\cdot\frac{3}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2-1)^3}=\frac{-(x^2-1)+3x^2}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(x)=0 \quad\rightarrow\quad x^2=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{R}$ → No existen candidatos a puntos de inflexión.

Evaluamos la segunda derivada en los intervalos del dominio.

$(-\infty,-1) \quad\rightarrow\quad f'(-100)>0 \quad\rightarrow\quad f(x)$ convexa U

$(1,\infty) \quad\rightarrow\quad f''(100)>0 \quad\rightarrow\quad f(x)$ convexa U



6. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$

El dominio de la función son todos los reales, ya que la exponencial del denominador nunca se anula, y tanto numerador (polinomio) como denominador (exponencial) son funciones cuyo dominio es toda la recta real.

La función no es par ni impar. Los puntos de corte con los ejes son:

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0+1}{1}=1 \;\rightarrow\; (0,1)$$

$$y=0 \;\rightarrow\; f(x)=0 \;\rightarrow\; x=-1 \;\rightarrow\; (-1,0)$$

Si el dominio es toda la recta real, no tendremos asíntotas verticales.

La asíntota horizontal se estudia con el límite en el infinito de la función.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$

$y=0$ Asíntota horizontal cuando la variable tiende a más infinito.

Ojo, al no ser un cociente de polinomios, debemos estudiar la AH también en menos infinito.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x}=\frac{-\infty}{0}=-\infty$$

Recuerda que la exponencial, en menos infinito, tiende a 0. Por eso aparece 0 en el denominador del anterior límite. Por lo tanto, no habrá AH cuando la variable tiende a menos infinito.

Esto abre la posibilidad de que exista asíntota oblicua cuando x tienda a menos infinito.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x\cdot x}=(cambiar\ x\ por\ -x)(cambiar\ -\infty\ por\ +\infty)$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{e^{(-x)}\cdot(-x)}=(pasar\ exponencial\ a\ numerador)=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x+1)\cdot e^x}{-x}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

Indeterminación → L'Hôpital

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{(-1)\cdot e^x+(-x+1)e^x}{-1}=\frac{-\infty}{-1}=-\infty$ → No hay AO cuando x tiende a menos infinito

Derivamos para estudiar el crecimiento y los extremos relativos.

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x} \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x}{e^x}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=0$ → Punto crítico (candidato a extremos relativo)

Evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,0) \;\rightarrow\; f'(-100)>0 \;\rightarrow\; f(x)$ estrictamente creciente

$(0,\infty) \;\rightarrow\; f'(100)<0 \;\rightarrow\; f(x)$ estrictamente decreciente

Por lo tanto, en $x=0$ tenemos un máximo relativo. La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-x}{e^x} \;\rightarrow\; f''(x)=\frac{-e^x+x\,e^x}{(e^x)^2}=(simplificar\ exponencial)=\frac{-1+x}{e^x}$$

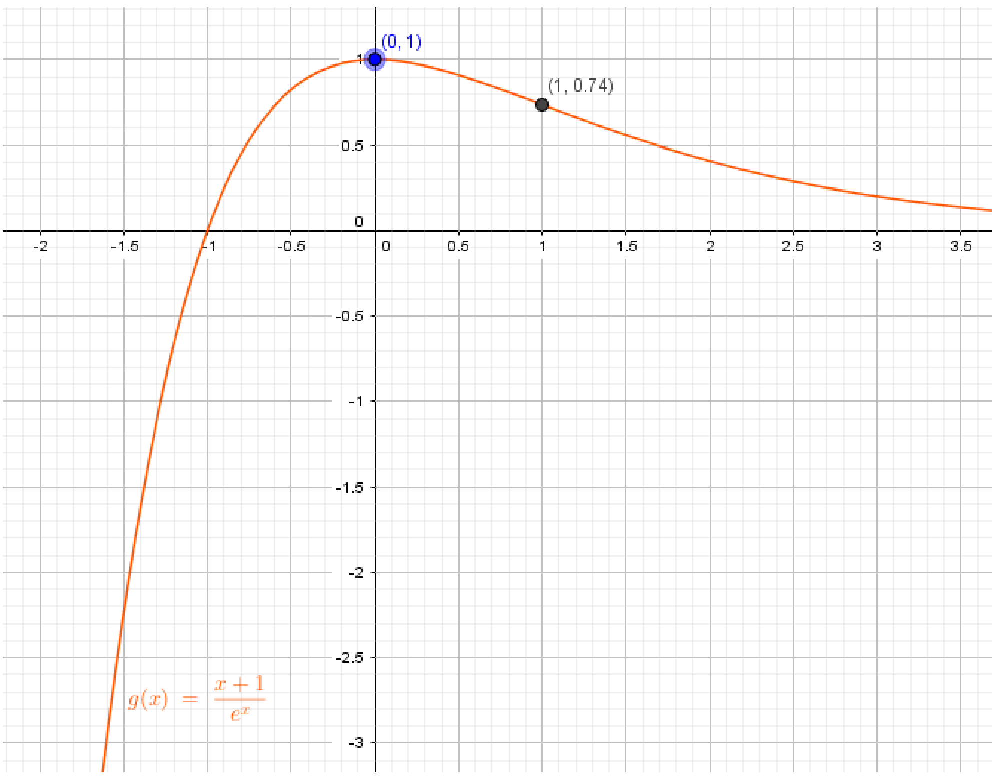
$f''(x)=0 \;\rightarrow\; x=1$ → Candidato a punto de inflexión

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,1) \;\rightarrow\; f''(-100)<0 \;\rightarrow\; f(x)$ cóncava ∩

$(0,\infty) \;\rightarrow\; f''(100)>0 \;\rightarrow\; f(x)$ convexa U

En $x=1$ tendremos un punto de inflexión.



7. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$

La función está definida para los reales positivos menos el 1, donde se anula el denominador. Con esto los argumentos del logaritmo nunca son negativos o nulos.

$$Dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$$

La función no es simétrica ni periódica.

Estudiamos las posibles asíntotas verticales en $x=0$ y $x=1$ mediante los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\ln(x)}=\nexists$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{-\infty}=0$$ → AV a la derecha de $x=0$.

En $x=0$ encontramos una discontinuidad no evitable de segunda especie.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

En $x=1$ hay asíntota vertical.

Estudiamos la asíntota horizontal (solo en más infinito, ya que la función no está definida en menos infinito).

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{\infty}=0$$ → Asíntota horizontal en $y=0$

Al haber horizontal no hay asíntota oblicua.

Calculamos la función derivada para estudiar la monotonía y los extremos relativos.

$f'(x)=\frac{-1}{x\ln^2(x)}$, $f'(x)=0 \ \rightarrow \ -1=0$ → Absurdo matemático → No hay extremos relativos.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los siguientes intervalos.

$(0,1) \ \rightarrow \ f'(\frac{1}{2})<0 \ \rightarrow \ f(x)$ estrictamente decreciente

$(1,+\infty) \ \rightarrow \ f'(10)<0 \ \rightarrow \ f(x)$ estrictamente decreciente

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio de definición.

Para la curvatura realizamos la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{\ln^2(x)+x\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{x^2\ln^4(x)}=\frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)} \quad , \quad f''(x)=0 \ \rightarrow \ \ln(x)=-2 \ \rightarrow \ x=e^{-2}$$

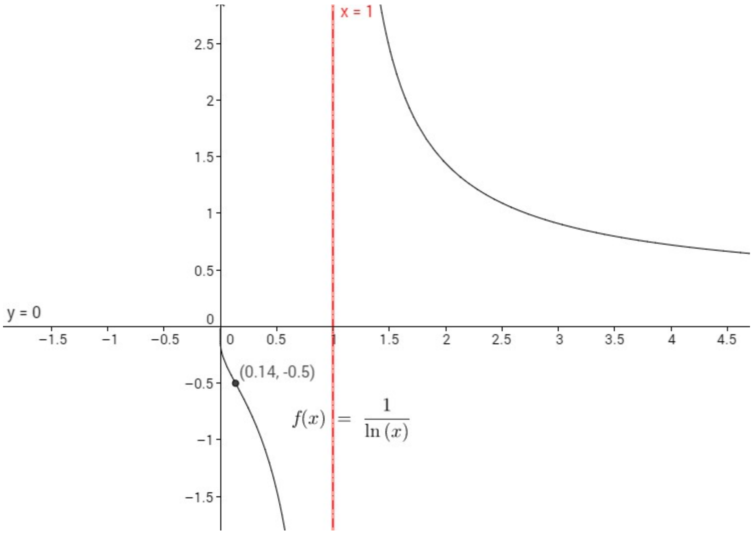
Poseemos un candidato a punto de inflexión en $(\frac{1}{e^2}, f(\frac{1}{e^2}))=(0{,}14 \ , \ -0{,}5)$

$(0, \ 0{,}14) \ \rightarrow \ f''(0{,}1)>0 \ \rightarrow \ f(x)$ convexa U

$(0{,}14 \ ,1) \ \rightarrow \ f'(0{,}5)<0 \ \rightarrow \ f(x)$ cóncava ∩

$(0{,}14 \ ,+\infty) \ \rightarrow \ f''(10)>0 \ \rightarrow \ f(x)$ convexa U

En $(0{,}14 \ , \ -0{,}5)$ existe un punto de inflexión.



8. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$

La función está definida para todos los reales, por ser composición de funciones continuas en toda la recta real (polinomio y exponencial).

$Dom(f)=\mathbb{R}$

Corte con los ejes en $(0,1)$.

La función no es periódica pero sí posee simetría par: $f(x)=f(-x)$

No existen asíntotas verticales por ser continua en toda la recta real.

Estudiamos la asíntota horizontal (tanto en más como en menos infinito).

$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0$ → Asíntota horizontal en $y=0$

Al haber asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

Calculamos la función derivada para estudiar la monotonía y los extremos relativos.

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow x=0$ → Punto candidato a extremos relativo: $(0,1)$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los siguientes intervalos.

$(-\infty,0) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

$(0,+\infty) \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

Para la curvatura realizamos la segunda derivada.

$f''(x)=-2(e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2})=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x)=0 \rightarrow 1-2x^2=0 \rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

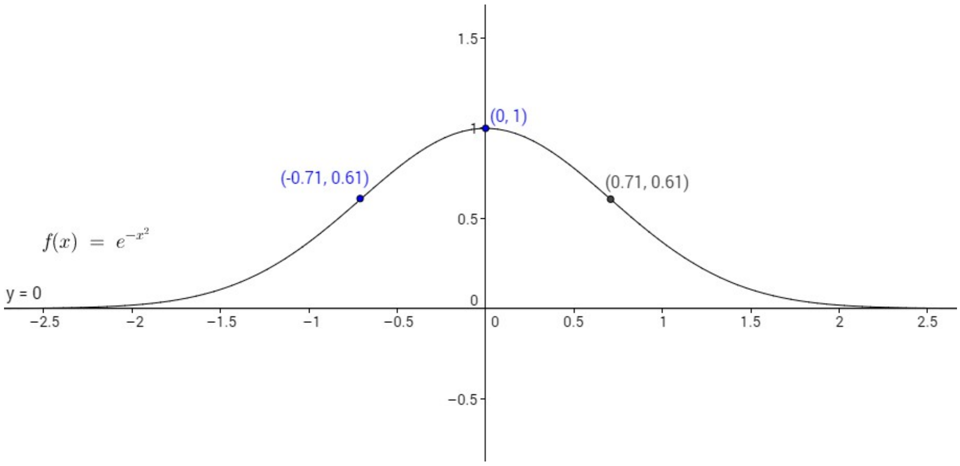
Poseemos dos candidato a puntos de inflexión en $(\frac{-\sqrt{2}}{2},\ 0{,}61)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0{,}61)$.

$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow f''(-10)>0 \rightarrow f(x)$ convexa U

$(\frac{-\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava ∩

$(\frac{+\sqrt{2}}{2},+\infty) \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ convexa U

En $(\frac{-\sqrt{2}}{2},\ 0{,}61)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0{,}61)$ confirmamos la presencia de puntos de inflexión.


(0, 1)
(-0.71, 0.61)
(0.71, 0.61)
$f(x) = e^{-x^2}$
y = 0

9. Estudia y representa: $f(x)=\dfrac{6x^2+2x-3}{2x^2+6}$

No existe ningún número real que anule al denominador. El dominio es toda la recta real.

La función no presenta simetría par ni impar.

Corte con el eje OX → $y=0\,;\;\; 0=6x^2+2x-3$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{19}}{6} \;\; y \;\; x_2=\frac{-1+\sqrt{19}}{6}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6},0\right) \text{ y } \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6},0\right)$$

Corte con el eje OY → $x=0\,;\, y=\dfrac{-3}{6} \;\rightarrow\; y=\dfrac{-1}{2}$

$$\left(0,\;\frac{-1}{2}\right)$$

No hay asíntotas verticales puesto que la función está definida en toda la recta real

Asíntota Horizontal: calculamos límite de la función en el infinito. Al ser cociente de polinomios el resultado coincidirá con el límite en menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2x-3}{2x^2+6}=(dividir\;\; por\;\; máxima\;\; potencia\;\; x^2\;\; y\;\; evaluar)=\;\frac{6}{2}=3$$

Existe una asíntota horizontal en y=3. Al existir horizontal, no existe oblicua.

Calcularemos la derivada de la función y la igualamos a 0 para obtener los puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{(12x+2)\cdot(2x^2+6)-4x\cdot(6x^2+2x-3)}{(2x^2+6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{24x^3+72x+4x^2+12-24x^3-8x^2+12x}{(2x^2+6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+84x+12}{(2x^2+6)^2} \;\rightarrow\; f'(x)=0 \;\rightarrow\; -4x^2+84x+12=0 \;\rightarrow\; -x^2+21x+3=0$$

$x_1=\dfrac{-21-\sqrt{453}}{-2}=21{,}14 \;\; y \;\; x_2=\dfrac{-21+\sqrt{453}}{-2}=-0{,}14$ → puntos críticos

Con ayuda de una tabla y dándole valores a la función derivada en cada intervalo, sabremos si los puntos son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

$(-\infty,-0{,}14) \rightarrow f'(-5)<0$ → función estrictamente decreciente

$(-0{,}14, 21{,}14) \rightarrow f'(0)>0$ → función estrictamente creciente

$(21{,}14,+\infty) \rightarrow f'(100)<0$ → función estrictamente decreciente

Conclusión:

$x=-0{,}14$ → mínimo relativo

$x=21{,}14$ → máximo relativo

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a 0 para obtener los candidatos a puntos de inflexión.

$$f'(x)=\frac{-4x^2+84x+12}{(2x^2+6)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-8x+84)\cdot(2x^2+6)^2-(-4x^2+84x+12)\cdot 2\cdot(2x^2+6)\cdot 4x}{(2x^2+6)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x^3-63x^2-18x+63}{x^6+9x^4+27x^2+27} \rightarrow f''(x)=0$$

Resolvemos con ayuda de Geogebra: $x=-1{,}13$, $x=0{,}88$, $x=31{,}75$

Evaluamos la segunda derivada en los correspondientes intervalos:

$(-\infty,-1{,}13) \rightarrow f''(-5)<0$ → función cóncava

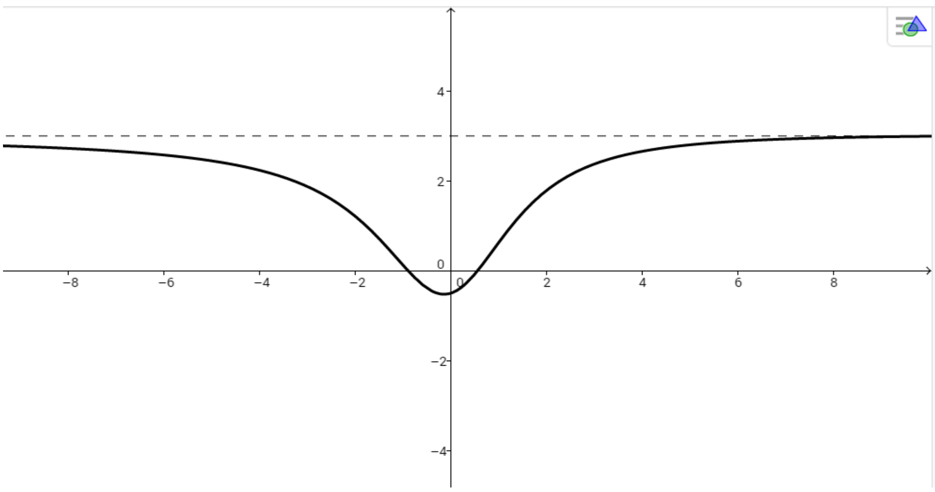
$(-1{,}13, 0{,}88) \rightarrow f''(0)>0$ → función convexa

$(0{,}88, 31{,}75) \rightarrow f''(10)<0$ → función cóncava

$(31{,}75,+\infty) \rightarrow f''(100)>0$ → función convexa

Conclusión:

Los valores $x=-1{,}13$, $x=0{,}88$, $x=31{,}75$ son puntos de inflexión



10. Estudia y representa $f(x)=3x^4-4x^3$

Dominio: toda la recta real por ser polinómica.

Puntos de corte con el eje OX → $3x^4-4x^3=0 \rightarrow \quad (0,0) \quad , \quad (\frac{4}{3},0)$

Corte con el eje OY → $(0,0)$

No hay AV al estar definida en todo R y ser continua en todo su dominio.

No hay AH ni AO por ser polinómica y divergir en el infinito

Calculamos la primera derivada para obtener los candidatos a extremo relativo.

$f'(x)=12x^3-12x^2 \rightarrow \quad f'(x)=0 \rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=1$ → puntos críticos

Evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,0) \rightarrow \quad f'(-5)<0$ → función estrictamente decreciente

$(0,1) \rightarrow \quad f'(1/2)<0$ → función estrictamente decreciente

$(1,+\infty) \rightarrow \quad f'(100)>0$ → función estrictamente creciente

Conclusión:

$x=0$ es un punto de inflexión (no hay cambio de crecimiento en un entorno alrededor de ese punto)

$x=1$ es un mínimo relativo.

Calculamos la segunda derivada para obtener más candidatos a puntos de inflexión.

$f''(x)=36x^2-24x \rightarrow \quad f''(x)=0 \rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=\frac{2}{3}$

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

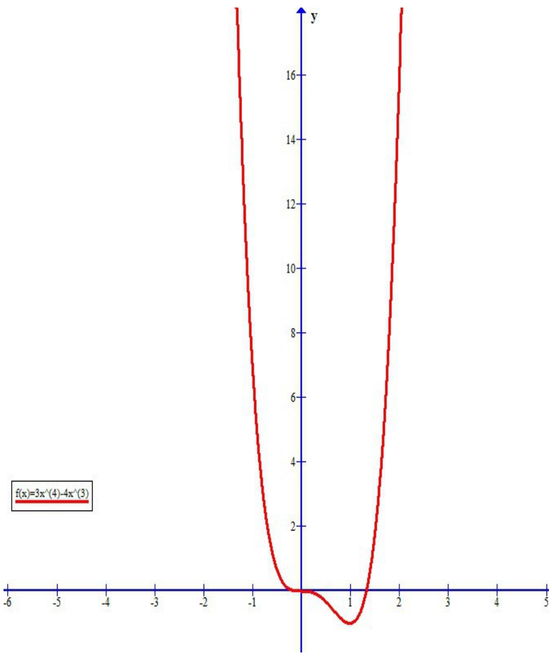
$(-\infty,0) \rightarrow \quad f''(-5)>0$ → función convexa

$(0,2/3) \rightarrow \quad f''(1/2)<0$ → función cóncava

$(2/3,+\infty) \rightarrow \quad f''(100)>0$ → función convexa

Conclusión:

$x=0$ y $x=\frac{2}{3}$ son puntos de inflexión.



11. Sea la función definida por $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$ para $x\geqslant -1, x\neq 0$.

a) Calcula los límites laterales de la función en $x=0$.

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

a) Calculamos los límites a la izquierda y a la derecha de 0. Para ello recuerda que la exponencial de infinito tiende a infinito, mientras que la exponencial de menos infinito tiende a cero.

$$\lim_{x\to 0-}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=0\cdot e^{\infty}=0\cdot\infty$$ → Indeterminación → recuerda que $x=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}\right)=(simplificar)=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}=+\infty$$

b) La función no es continua en $x=0$ al no coincidir sus límites laterales. Además, el límite lateral por la derecha diverge a $+\infty$. Por lo tanto $x=0$ es una asíntota vertical para valores a la derecha de cero.

Para la asíntota horizontal comprobamos si converge a un valor finito el límite en más infinito. ¡OJO! No hacemos el límite en menos infinito porque el enunciado indica que la función está definida en $x\geqslant -1, x\neq 0$. Si no tuviéramos este dato, deberíamos estudiar la AH tanto en más como en menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=\infty\cdot e^{0}=\infty\cdot 1=+\infty$$ → No existe AH

En la asíntota oblicua $y=mx+n$ cuando la variable tiende a más infinito, debe cumplirse:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0 \;\rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\,e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)=(simplificar)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{0}=1 \;\rightarrow\; m=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=n \;\rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{0}{0}$$

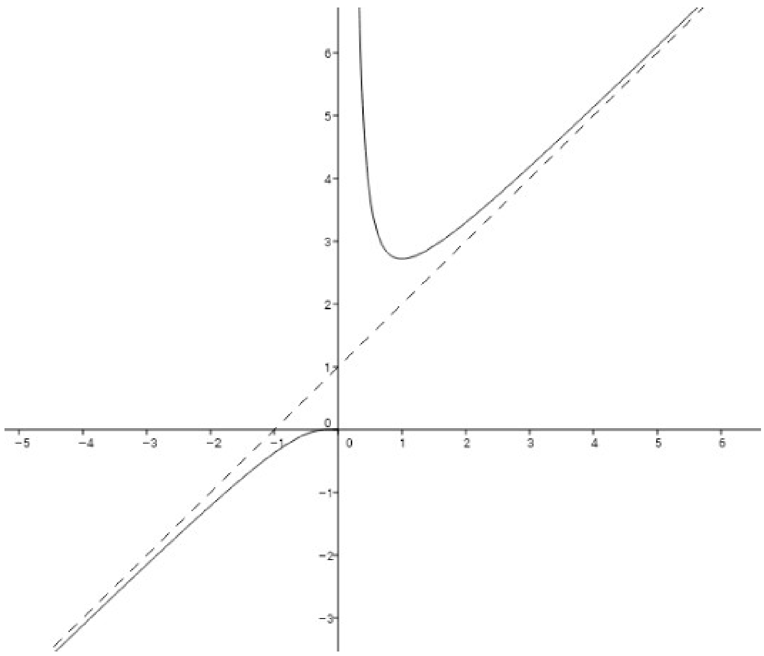
Donde hemos usado nuevamente que $x=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$.

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación $\frac{0}{0}$ y calculamos el límite de la derivada del numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=L'\,Hôpital=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=(simplificar)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=e^0=1$$

Existe asíntota oblicua $y=x+1$, que representamos gráficamente junto a la función $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$.

$$Función\ \ f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}\ \ y\ \ asíntota\ \ oblicua\ \ y=x+1$$



12. Sea $f(x)=\frac{x}{\ln x}$. Estudia el dominio, las asíntotas y los extremos relativos.

$f(x)=\frac{x}{\ln x} \quad \rightarrow \quad Dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$ → Así garantizamos valores positivos dentro del logaritmo y no dividir por cero (recuerda que $\ln(1)=0$).

La Asíntota Vertical en $x=0$ solo tiene sentido plantearla a la derecha de 0, ya que el dominio de la función hemos razonado que no está definido a la izquierda de 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{0}{\ln(0^+)}=\frac{0}{-\infty}=0\cdot 0=0$$ → No hay asíntota vertical en $x=0$

La Asíntota Vertical en $x=1$ sí debemos estudiarla tanto a la izquierda como a la derecha.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{1}{\ln(1^-)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{1}{\ln(1^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Existe A.V. en $x=1$ tanto a su izquierda como a su derecha.

La Asíntota Horizontal solo debemos estudiarla en más infinito, debido a que la función no está definida en menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(x)=+\infty$$ → No existe AH.

Para estudiar la Asíntota oblicua planteamos el límite para obtener la pendiente de la recta oblicua.

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}\right)=(simplificar)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\ln(x)}}{1}\right)=\frac{1}{\infty}=0 \quad \rightarrow \quad m=0$$

Al ser la pendiente nula, no existe asíntota oblica.

Para estudiar los extremos relativos, necesitamos la primera derivada de la función.

$f(x)=\frac{x}{\ln x} \rightarrow f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(lnx)^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow \ln(x)=1 \rightarrow x=e$ → punto crítico

Evaluamos la primera derivada alrededor del punto crítico, recordando que en $x=1$ tenemos una asíntota vertical.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(2)<0$	$f'(10)>0$

Tenemos un mínimo relativo en el punto (e,e) .

13. Estudia las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ **.**

No existen asíntotas verticales, ya que el denominador nunca se anula. El dominio de este cociente de polinomios es toda la recta real.

Asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1$ → por ser cociente de polinomios del mismo grado, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 .

Existe asíntota horizontal en $y=1$ tanto en más como en menos infinito, por lo que no existe asíntota oblicua.

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)=0$ → $x=\pm 1$ → puntos críticos

Evaluamos la derivada a ambos lados de los puntos críticos.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(0)>0$	$f'(-10)<0$

En $x=-1$ tenemos un mínimo relativo, y en $x=1$ un máximo. Calculemos sus imágenes:

$f(-1)=\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{3}{2}$

14. Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.

Dominio → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

Corte eje OX → $y=0$ → $2x^2=0$ → $(0,0)$

Corte eje OY → $x=0$ → $y=0$ → $(0,0)$

Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$, ya que se cumple:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\infty \rightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^+}=+\infty \;,\; \lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\infty \rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^-}=-\infty \;,\; \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=2$ → por ser cociente de polinomios del mismo grado, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 .

Existe asíntota horizontal en $y=2$ tanto en más como en menos infinito, por lo que no existe asíntota oblicua.

Calculamos la primera derivada para estudiar el crecimiento.

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \rightarrow f'(x)=\frac{4x(x^2-x-2)-2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-4x^2-8x-4x^3+2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2} \;,\; f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-8x=0$$

$-x(2x+8)=0$ → $x=0$, $x=-4$ → puntos críticos

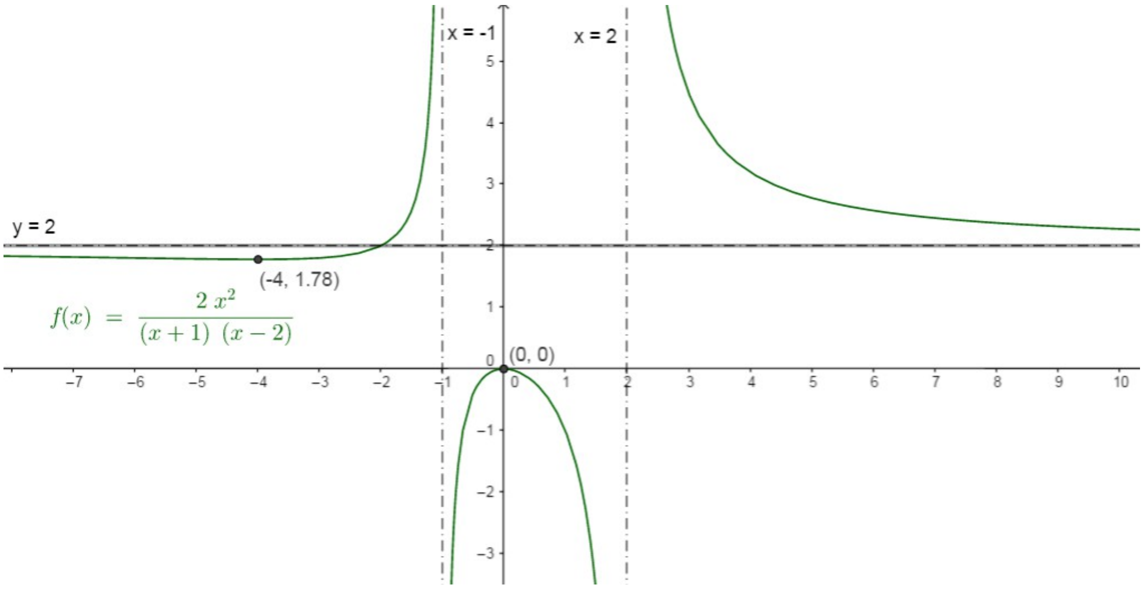
Estudiamos el crecimiento y la existencia de extremos relativos, recordando que el dominio de la función es $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(4,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(-2)>0$	$f'(\frac{-1}{2})>0$	$f'(1)<0$	$f'(10)<0$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, estrictamente creciente en $(-4,-1)\cup(-1,0)$, presenta un mínimo relativo en $x=-4$ (punto $(-4,1.78)$) y un máximo relativo en $x=0$ (punto $(0,0)$).

Aunque no nos pidan la gráfica, la incluimos para visualizar la solución.

Gráfica de $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$



15. Representa $y=x^3-4x$ **.**

Dominio de la función: $Dom(f)=\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Corte con los ejes.

Eje OX $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $0=x^3-4x$ $\rightarrow$ $(-2,0),(0,0),(2,0)$

Eje OY $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $(0,0)$

Simetría $\rightarrow$ $f(x)=-f(-x)$ $\rightarrow$ impar (simétrica respecto al origen)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Máximos y mínimos relativos $\rightarrow$ $y'=3x^2-4$, $y'=0$ $\rightarrow$ $x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$ $\rightarrow$ puntos críticos

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$y''=6x$

$y''(\frac{2\sqrt{3}}{3})>0$ $\rightarrow$ $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ mínimo relativo $\rightarrow$ $(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ -3{,}07)$

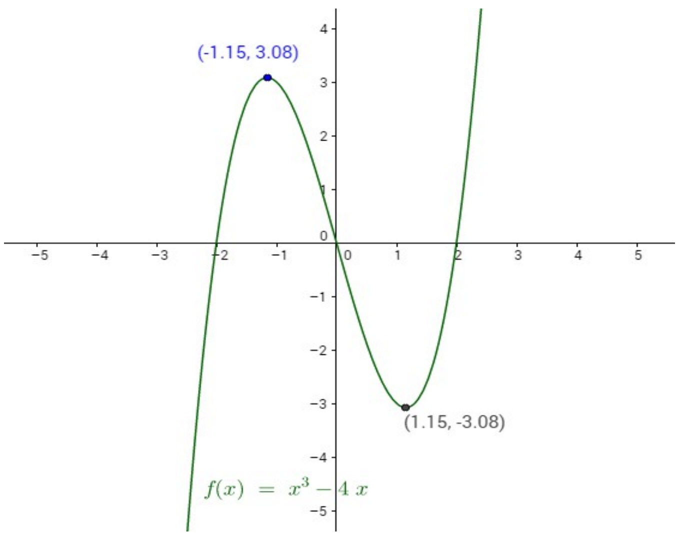
$y''(\frac{-2\sqrt{3}}{3})<0$ $\rightarrow$ $x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ máximo relativo $\rightarrow$ $(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\ 3{,}07)$

Curvatura $\rightarrow$ $y''=6x$, $y''=0$ $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ candidato a punto de inflexión

$-\infty<x<0$ $\rightarrow$ $y''(-10)<0$ $\rightarrow$ cóncava ∩

$0<x<\infty$ $\rightarrow$ $y''(10)>0$ $\rightarrow$ convexa U

Tenemos un punto de inflexión en $(0,0)$.



16. Representa $y=x^4-6x^2+5$ **.**

Dominio de la función: $Dom(f)=\mathbb{R}$ → por ser polinómica

Corte con los ejes.

Eje OX → $y=0$ → $0=x^4-6x^2+5$ → $(-\sqrt{5},0),(-1,0),(1,0),(\sqrt{5},0)$

Eje OY → $x=0$ → $(0,5)$

Simetría → $f(x)=f(-x)$ → par (simétrica respecto al eje OY)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Calculamos la primera derivada.

$y=x^4-6x^2+5$

$y'=4x^3-12x$, $y'=0$ → $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ → puntos críticos

Para saber si son máximos o mínimos, evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$y''=12x^2-12$

$y''(-\sqrt{3})>0$ → $x=-\sqrt{3}$ es máximo → $(-\sqrt{3},4)$

$y''(0)=-12<0$ → $x=0$ es mínimo → $(0,5)$

$y''(\sqrt{3})>0$ → $x=\sqrt{3}$ es máximo → $(\sqrt{3},4)$

Para estudiar la concavidad y convexidad anulamos la segunda derivada, para obtener los candidatos a puntos de inflexión.

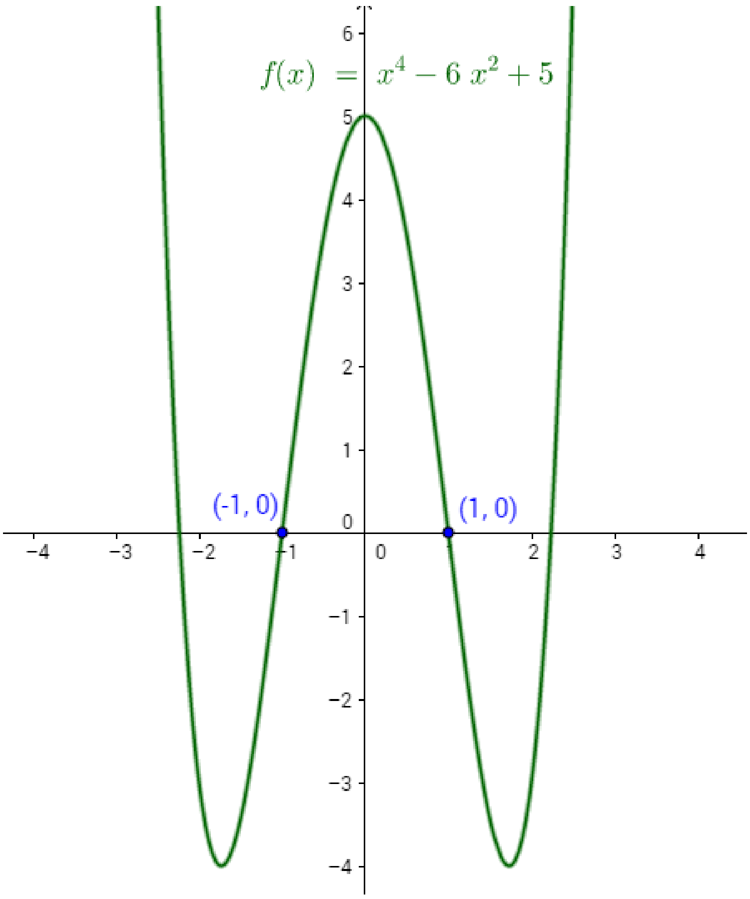
$y''=12x^2-12$, $y''=0$ → $x=\pm 1$

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Segunda derivada $f''(x)$	$f''(-10)>0$	$f''(0)<0$	$f''(10)>0$

Por lo tanto, los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son puntos de inflexión.

Gráfica de $f(x)=x^4-6x^2+5$



17. Representa $y=\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ **.**

La función es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$ por cociente de polinomios cuyo denominador se anula en $x=3$.

Corte con eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,\frac{-4}{3})$

Corte con eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow (2,0)$

La función no es simétrica.

Estudiamos las asíntotas. Candidato a AV: $x=3$

$$\lim_{x\rightarrow 3}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=\frac{9-12+4}{0}=\infty \rightarrow \lim_{x\rightarrow 3^-}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=-\infty \ , \ \lim_{x\rightarrow 3^+}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=+\infty$$

Existe asíntota vertical en $x=3$.

$\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x-3}=\infty$ → no existen asíntotas horizontales

Al ser el grado del numerador superior en una unida al grado del denominador, tendremos asíntota oblicua.

$$m=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2-4x+4}{x(x-3)}=1 \rightarrow m=1$$

Donde hemos aplicado que el límite es igual el cociente de coeficiente que acompañan a la máxima potencia.

$$n=\lim_{x\rightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\rightarrow\infty}(\frac{x^2-4x+4}{x-3}-x)=\lim_{x\rightarrow\infty}(\frac{-x+4}{x-3})=-1 \rightarrow n=-1$$

Es decir, existe una asíntota horizontal en $y=x-1$ tanto en más como en menos infinito.

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando la primera derivada, igualando a cero y obteniendo los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-3} \rightarrow f(x)=\frac{2(x-2)(x-3)-(x-2)^2}{(x-3)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x=2 \ , \ x=4$ → puntos críticos

Hacemos intervalos con los valores críticos y los puntos donde no está definida la función.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(\frac{5}{2})<0$	$f'(\frac{7}{2})<0$	$f'(10)>0$

Tenemos un máximo relativo en $(2,0)$ y un mínimo relativo en $(4,4)$.

Calculamos la segunda derivada para estudiar la curvatura.

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+8)2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x+8)}{(x-3)^3} \rightarrow f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}$$

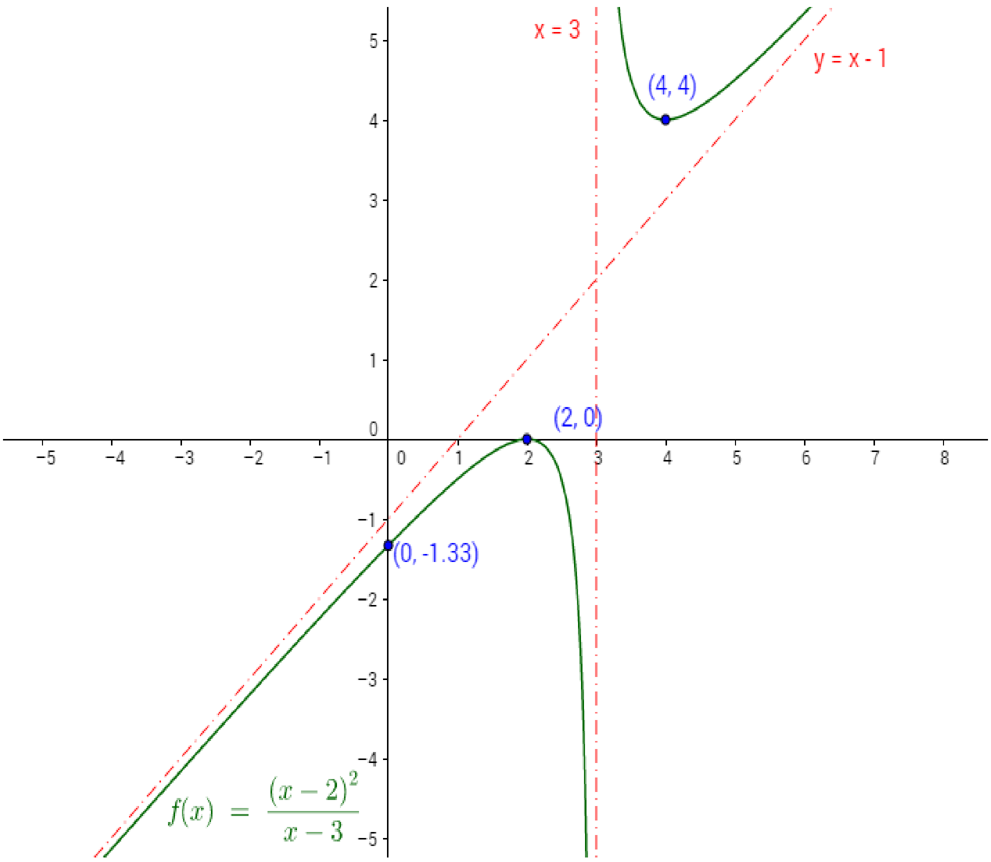
$f''(x)=0 \rightarrow 2=0$ → absurdo matemático → no existen puntos de inflexión

Podemos evaluar la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de $x=3$, donde no está definida la función, para determinar la curvatura.

$-\infty<x<3 \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)\cap$ → cóncava

$3<x<\infty \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)\cup$ → convexa

Ya tenemos información suficiente para representar la gráfica.



18. Sea $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$ **.**

a) Estudia el dominio y las asíntotas de la función.

b) Estudia la monotonía

c) Realiza un dibujo aproximado de la gráfica.

a) $Dom(f)=\mathbb{R}-{2,3}$ por anularse el denominador en los puntos $x=2$ y $x=3$.

Estudiamos las asíntotas verticales en aquellos puntos donde se anula el denominador. Estudiamos los límites laterales para conocer el signo hacia donde se dispara la función en las proximidades de estos puntos.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

La asíntota horizontal aparece al estudiar el comportamiento de la función cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2-5x+6}=0$$

Donde hemos aplicado que el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador. Existe asíntota horizontal en $y=0$ tanto en más como en menos infinito.

Y si existe horizontal, no existe asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y candidatos a extremos relativos.

$$f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}\ \rightarrow\ f'(x)=-2\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}\quad ,\quad f'(x)=0\ \rightarrow\ x=\frac{5}{2}$$

El punto $(\frac{5}{2},f(\frac{5}{2}))=(\frac{5}{2},-8)$ es un punto crítico. Estudiamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,2)\ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ f'(0)>0\ \rightarrow\ f(x)$ estrictamente creciente

$(2,\frac{5}{2})\ \rightarrow\ x=\frac{9}{4}\ \rightarrow\ f'(\frac{9}{4})>0\ \rightarrow\ f(x)$ estrictamente creciente

$(\frac{5}{2},3)\ \rightarrow\ x=\frac{11}{4}\ \rightarrow\ f'(\frac{11}{4})<0\ \rightarrow\ f(x)$ estrictamente decreciente

$(3,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(3)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

Por lo tanto en $\left(\frac{5}{2},-8\right)$ tenemos un máximo relativo por cambiar el crecimiento de creciente a decreciente a ambos lados del punto.

c)