I - Étude de fonctions (1) S.V + S.G

Dans la suite le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$.

Eléments de symétrie d'une courbe (C) : y = f(x)

1. *1) Dans chacun des cas suivants, montrer que la courbe (C) d'équation y = f(x) admet l'élément indiqué comme élément de symétrie.*

a- (C) : $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}}{2x^2-4x+1}$; la droite (d) : $x = 1$.

b- (C) : $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; le point $A(-1\ ;\ 0)$.

2) Dans chacun des cas suivants, indiquer l'élément de symétrie de la courbe (C) d'équation y = f(x).

a - (C) : $y = f(x) = \dfrac{x.\sin x}{\cos x+2}$

b- (C) : $y = f(x) = \left(4+3\cos(2x)\right).\tan(x)$

Fonctions composées.

2. Domaine de définition et calcul de gof.

Dans chacun des cas suivants, définir gof après avoir défini son domaine de définition :

1) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$.

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$; $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Dérivée de gof.

3. *Calculer la fonction dérivée première de chacune des fonctions suivantes :*
(le domaine de dérivabilité de f ainsi que la forme réduite de la dérivée ne sont pas demandés)

1) $f : x \mapsto \sin^2\left(\sqrt{2x}\right)$.

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(3x)}$.

3) $f : x \mapsto \sqrt{\tan(3x)}$.

4) $f : x \mapsto 3x^2.\sin(2x)$.

5) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{\cos(2x)}$.

4. 1) On donne les deux fonctions f et g définies dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Connaissant $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ (g' est la fonction dérivée de g) :

a- Calculer $(gof)'(x)$.

b- Soit h la fonction définie par $h(x) = g\left(\sqrt{2x}\right)$. Calculer $h'(x)$.

2) On donne les deux fonctions f et g définies dans l'intervalle $]-\infty\ ;+\infty\ [$.

Connaissant $g(x) = x^2+x+1$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Calculer $(f\circ g)'(0)$.

Applications des dérivées

5. Dans chacun des cas suivants, trouver l'équation de la tangente à la courbe (C) au point de cette courbe d'abscisse α.

1) (C) d'équation $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $\alpha = 0$.

2) (C) d'équation $y = f(x) = 2x+1+\sqrt{-x^2+2x}$; $\alpha = 1$.

3) (C) d'équation $y = f(x) = x+\sqrt{x-2}$; $\alpha = 2$.

Formes indéterminées et règle de l'Hospital

6. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\cos 2x + x - 1}$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\frac{\tan(\pi x)-1}{4x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+1)^2-9}{(3x-2)^4-1}$

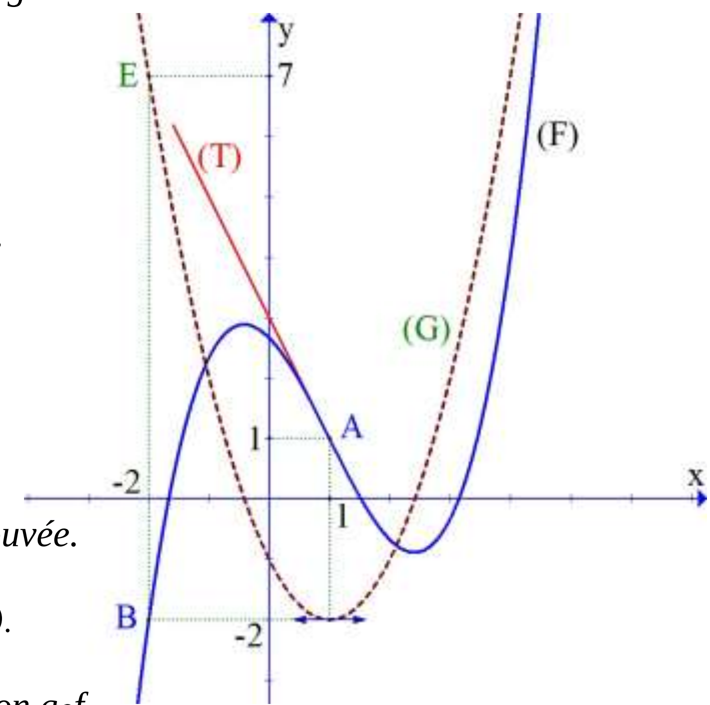
Dérivée seconde – concavité d'une courbe – point d'inflexion

7. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3-3x^2+1$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la concavité de (C) et en déduire que (C) admet un point d'inflexion A à déterminer.

2) Montrer que A est un centre de symétrie de (C).

8. *Les deux courbes (F) et (G) sont respectivement les courbes représentatives de deux fonctions f et g continues et dérivables sur IR.*



Indications :
*g est **la dérivée** de f.*
(F) passe par B(-2 ;-2) et par A(1 ;1).
(T) est la tangente en A à la courbe (F).
(G) passe par E(-2 ;7) et admet au point (1 ;-2) une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1) *Trouver l'équation de (T).*

2) *Calculer $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)+2}{x+2}$ et donner une interprétation graphique à la valeur ainsi trouvée.*

3) *Montrer que A est un point d'inflexion de (F).*

4) *Soit (L) la courbe représentative de la fonction $g \circ f$. Trouver l'équation de la tangente (D) à la courbe (L) au point K de cette courbe d'abscisse 1.*

Image d'un intervalle I par une fonction continue.
Existence de solution(s), dans I, de l'équation $f(x) = g(x)$.

9. 1) *Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une solution unique α.*

2) Vérifier que $0.39 < \alpha < 0.40$

10. *Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$.*

1) *a- Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{8}{5}$, admet dans $[-2 ; -1]$ une solution unique α.*

b- Démontrer que : $-1.25 < \alpha < -1.24$

2) *a- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$, admet dans $[-3 ; -2]$ une solution unique β.*
b- Démontrer que : $-2.11 < \beta < -2.10$.

11. *On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par :*
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + 1$, et l'on désigne par (F) et (G) leurs courbes représentatives.

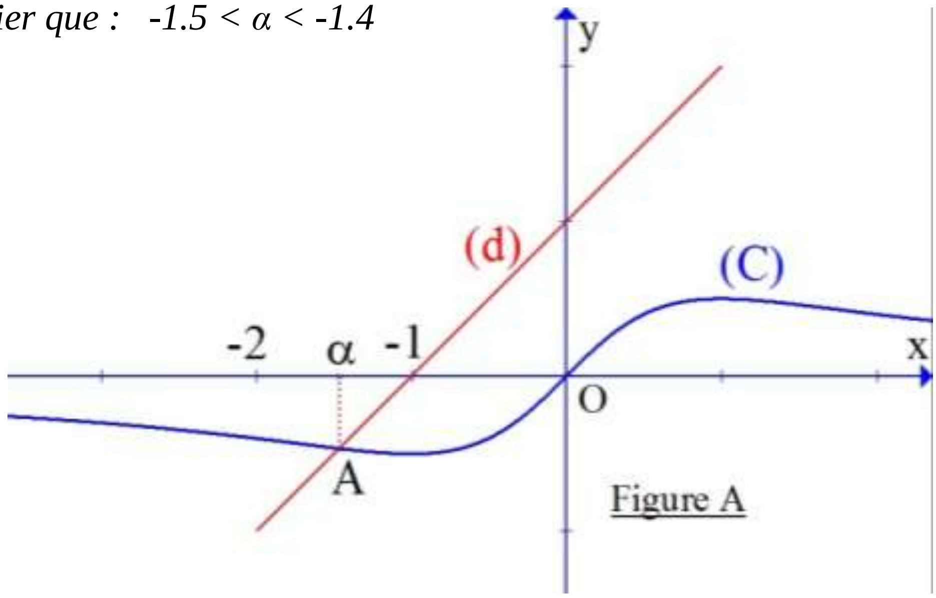
1) *Montrer que (F) et (G) ont un seul point commun A.*

2) *Soit α l'abscisse de A. Montrer que $0,68 < \alpha < 0,69$.*

12. *On considère la courbe (C) d'équation* $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
et la droite (d) d'équation $y = g(x) = x + 1$. *(<u>Figure A</u>)*

(C) et (d) ont un seul point commun A d'abscisse α.

Vérifier que : $-1.5 < \alpha < -1.4$



13. *La figure ci-contre représente le graphe (C) de la fonction* g *définie par* $g(x) = x^5 + 2x - 2$
Soit f *la fonction définie dans* $]-\infty\,;1[$
par $f(x) = \dfrac{x}{x^5 + x - 2}$

1) Démontrer que l'équation $f(x) = -1$, *admet une solution unique* α.

2) Vérifier que : $0.81 < \alpha < 0.82$