

## Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Stichprobe aus einer alternativen Grundgesamtheit, d.h. in der Stichprobe treten genau zwei Merkmalwerte auf (Ja/Nein oder 1/0). Der interessante Wert sei 1. Die Stichprobe umfasse nicht weniger als  $n=36$  Werte (dann nennt man sie groß). Wir wollen testen, wie groß der Anteil  $p$  der Einsen in der Grundgesamtheit ist.

## Hypothese, Gegenhypothesen und Fragestellungen:

Wir gehen von der Nullhypothese  $H_0: p = p_0$  aus. Damit wird behauptet, dass ein gewisser Prozentsatz  $p_0$  an Einsen in der Grundgesamtheit enthalten sei.

Folgende drei Fragestellungen für die Gegenhypothese sind – entsprechend der Interessenslage des Auftraggebers – möglich:

- a) Linkseitig:  $H_1: p < p_0$
- b) Rechtseitig:  $H_1: p > p_0$
- c) Beidseitig:  $H_1: p \neq p_0$

## Signifikanzniveau und Stichprobe:

Ein Signifikanzniveau  $\alpha$  muss vorgegeben sein. Damit wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art ( $H_0$  wird abgelehnt, obwohl i.W. zutreffend) gesteuert. Eine Stichprobe mit  $n$  (Stichprobenumfang) Stichprobenwerten wird gezogen.

## Prüfgröße:

Die Anzahl Einsen  $h$  in der Stichprobe (bzw. die Anzahl des zu prüfenden Merkmalwertes) wird eruiert und das Verhältnis  $p^*$  dieser Anzahl  $h$  zum Stichprobenumfang  $n$  wird berechnet:

$$p^* = \frac{h}{n} \quad (1)$$

Wird der Anteil  $p^*$  der Einsen in der Stichprobe als relative Größe angegeben ( $0 \leq p^* \leq 1$ ) so lautet die Prüfgröße:

$$z = \frac{n(p^* - p_0)}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \quad (2)$$

## Quantile für die Entscheidung mit dem Ablehnungsbereich:

Entsprechend der gegebenen Fragestellung müssen nun verschiedene Quantile der Standardnormalverteilung ermittelt werden, um die jeweiligen Ablehnungsbereiche zu erkennen:

a) Linksseitig: Quantil  $z_\alpha = \Theta^{-1}(\alpha)$  ( $q_L = \text{InversNormal}[0,1, \alpha]$  in GGB)

Der Ablehnungsbereich erstreckt sich von  $(-\infty, q_L]$

b) Rechtsseitig: Quantil  $z_{1-\alpha} = \Theta^{-1}(1-\alpha)$  ( $q_R = \text{InversNormal}[0,1, 1-\alpha]$  in GGB)

Der Ablehnungsbereich erstreckt sich von  $[q_R, \infty)$

c) Beidseitig. Quantile  $z_{\alpha/2} = \Theta^{-1}(\alpha/2)$  und  $z_{1-\alpha/2} = \Theta^{-1}(1-\alpha/2)$

( $q_1 = \text{InversNormal}[0,1, \alpha/2]$ ,  $q_2 = \text{InversNormal}[0,1, 1-\alpha/2]$ )

Der Ablehnungsbereich besteht aus zwei Teilen, nämlich  $(-\infty, q_1]$  und  $[q_2, \infty)$

## Entscheidung mit Ablehnungsbereich:

Fällt die Prüfgröße  $z$  in den Ablehnungsbereich der betrachteten Fragestellung, dann ist die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der betrachteten Gegenhypothese  $H_1$  abzulehnen:

Die Zufallsstichprobe spricht bei dieser Gegenhypothese **signifikant** gegen die Nullhypothese.

Andernfalls gibt es keinen Grund zur Ablehnung der Nullhypothese:

Die Zufallsstichprobe spricht **nicht signifikant** gegen die Nullhypothese.

## Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeiten (Irrtumswahrscheinlichkeit):

Völlig gleichberechtigt für die obigen Schritte zur statistischen Entscheidung ist die Methode der Überschreitungswahrscheinlichkeit. Sie unterscheidet sich nur in der Vorgehensweise von der Entscheidung mittels Ablehnungsbereichen.

Zunächst braucht man die Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

a) Einseitig (links- bzw. rechtsseitig):  $p_1 = 1 - \Phi(|z|)$  ( $p_1 = 1 - \text{Normal}[0,1, \text{abs}(z)]$  in GGB)

b) Zweiseitig (beidseitig):  $p_2 = 2(1 - \Phi(|z|))$  ( $p_2 = 2(1 - \text{Normal}[0,1, \text{abs}(z)])$  in GGB)

Entscheidung mit Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

a) Linksseitig:

Ist die Prüfgröße  $z$  negativ und die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_1$  kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.

Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen  $H_0$ .

Ist dagegen  $z$  nicht negativ oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_1$  nicht kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von  $H_0$ .

Kurz:

$z < 0$  und  $p_1 < \alpha \Rightarrow$  Ablehnung von  $H_0$

$z \geq 0$  oder  $p_1 \geq \alpha \Rightarrow$  Akzeptanz von  $H_0$

b) Rechtsseitig:

Ist die Prüfgröße  $z$  positiv und die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_1$  kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.

Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen  $H_0$ .

Ist dagegen  $z$  nicht positiv oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_1$  nicht kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von  $H_0$ .

Kurz:

$z > 0$  und  $p_1 < \alpha \Rightarrow$  Ablehnung von  $H_0$

$z \leq 0$  oder  $p_1 \geq \alpha \Rightarrow$  Akzeptanz von  $H_0$

c) Beidseitig:

Ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_2$  kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen  $H_0$ .

Ist dagegen die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $p_2$  nicht kleiner als das Signifikanzniveau  $\alpha$ , dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von  $H_0$ .

Kurz:

$p_2 < \alpha \Rightarrow$  Ablehnung von  $H_0$

$p_2 \geq \alpha \Rightarrow$  Akzeptanz von  $H_0$

Statt Überschreitungswahrscheinlichkeit spricht man auch von **Irrtumswahrscheinlichkeit**, weil man sich mit dieser Wahrscheinlich irrt, wenn man  $H_0$  ablehnt.

Ist also diese Irrtumswahrscheinlichkeit sehr klein, dann ist das Risiko 1.Art (einen Fehler 1.Art zu begehen) eher gering.

siehe Beispiele Test-Anteilwerte-links.ggb, Test-Anteilwerte-rechts.ggb, Test-Anteilwerte-beide.ggb