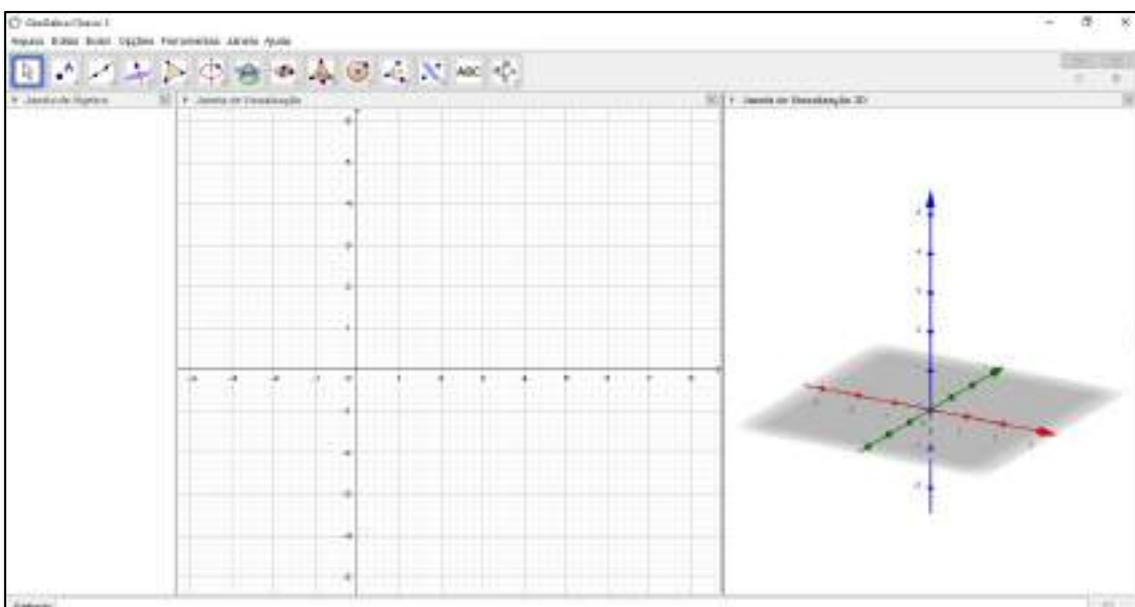
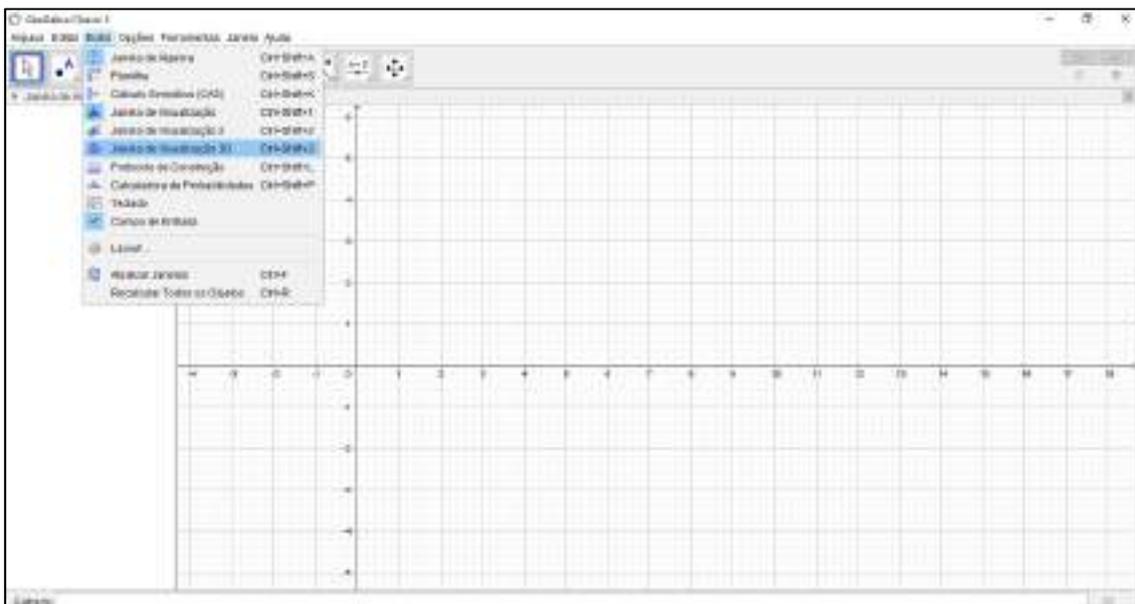


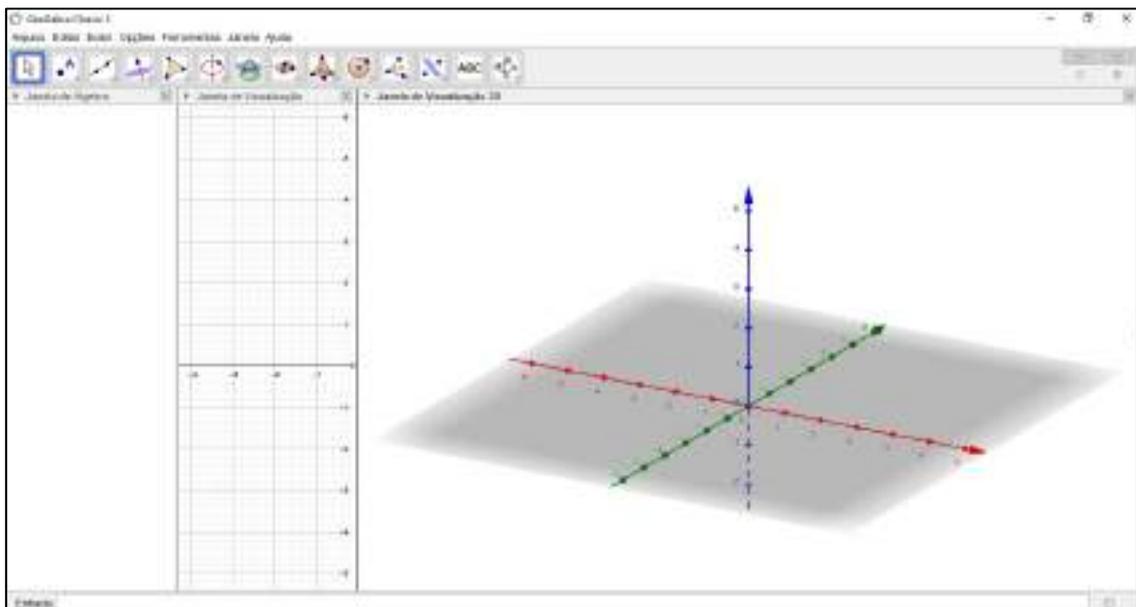
# O Princípio de Cavalieri - comparando áreas e deduzindo volumes

## Roteiro da construção básica para a Oficina 7

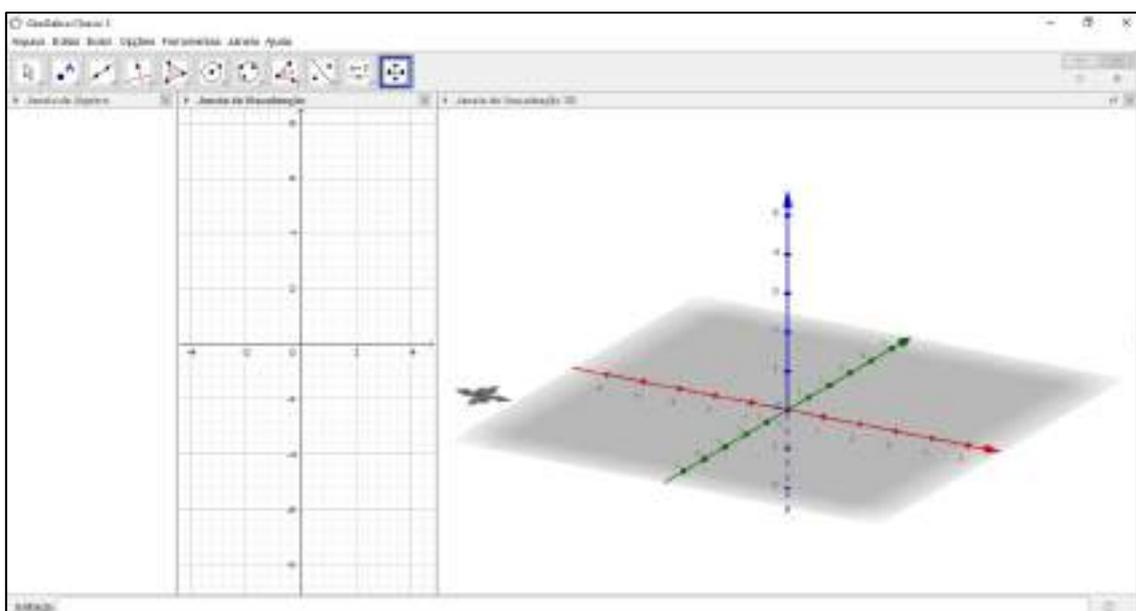
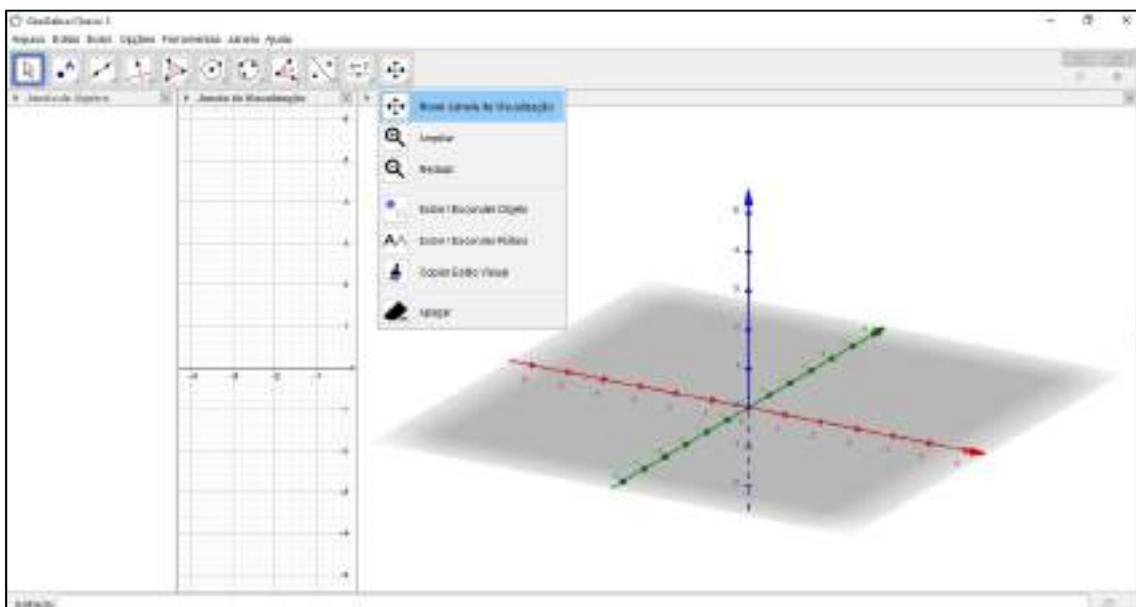
- (1) Nesta construção vamos utilizar o GeoGebra Clássico 5.
- (2) Clique em “Exibir” seguido de “Janela de visualização 3D”.



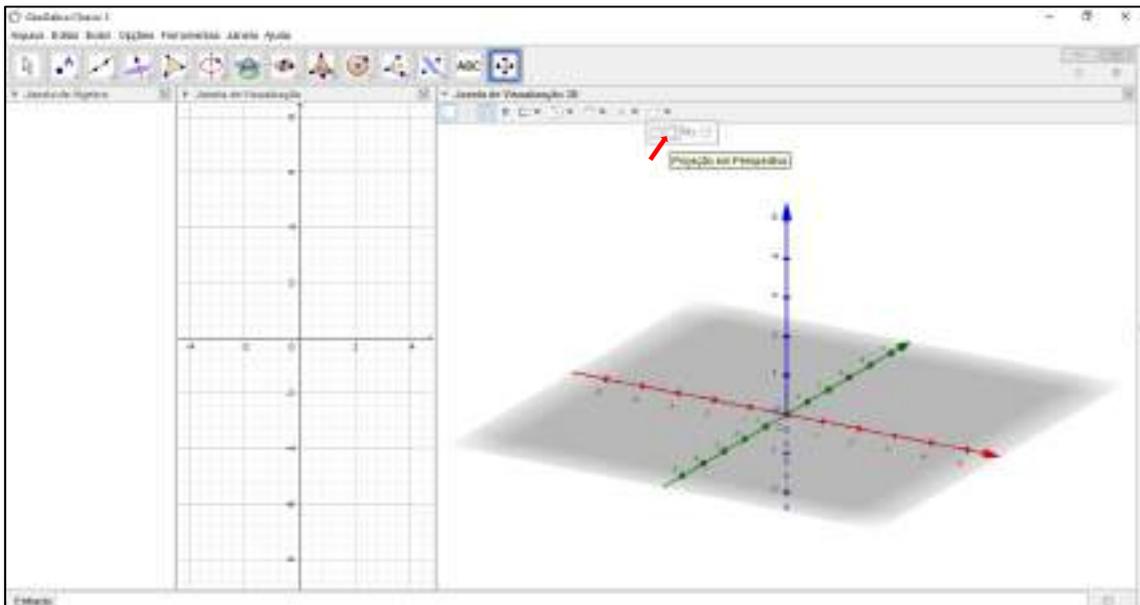
(3) Redimensione a primeira Janela de Visualização (2D) para ocupar uma parte menor da tela, evidenciando a Janela de Visualização 3D.



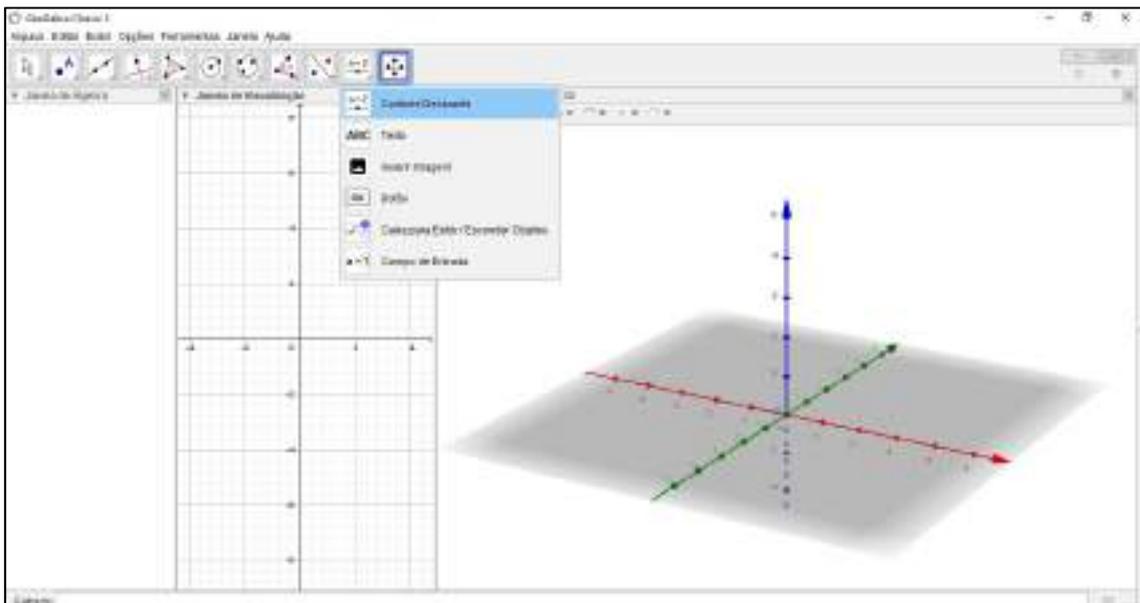
- (4) Clique na primeira Janela de Visualização e selecione o item “Mover Janela de Visualização” para centralizarmos os eixos na tela.



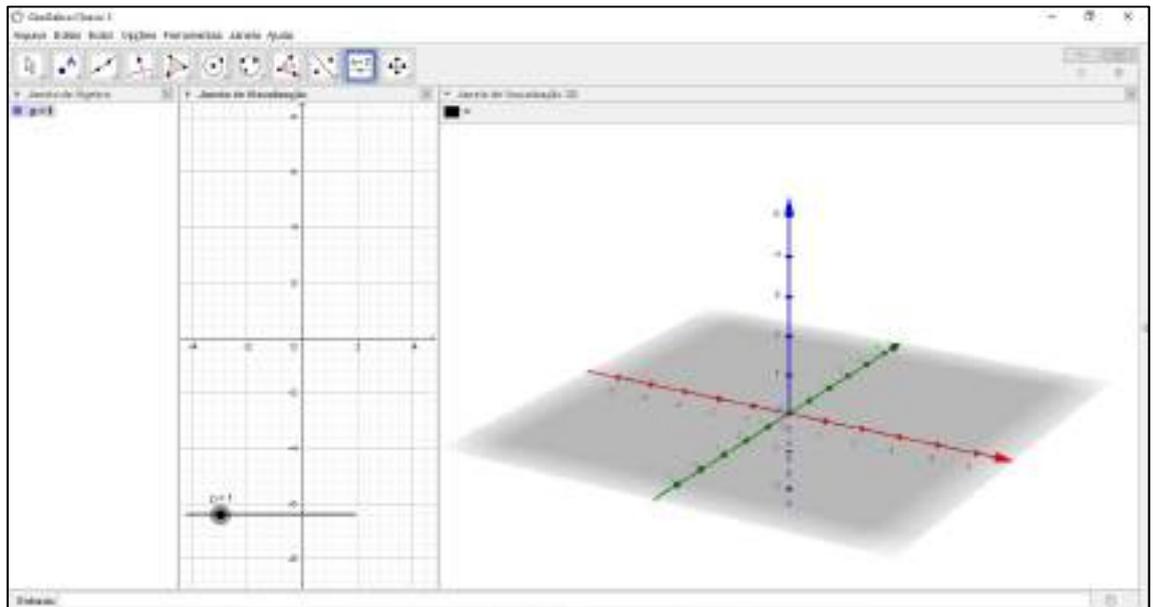
(5) Clique na Janela de Visualização 3D e escolha o tipo de projeção como sendo “Projeção em perspectiva”.



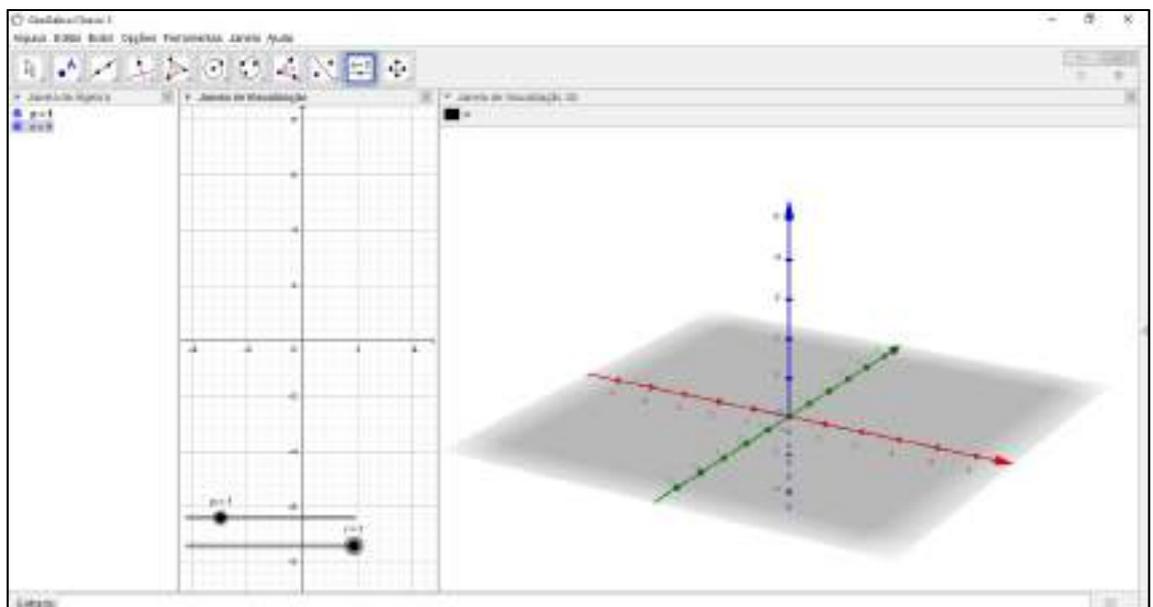
(6) Na primeira Janela de Visualização selecione a ferramenta “Controlador Deslizante”.



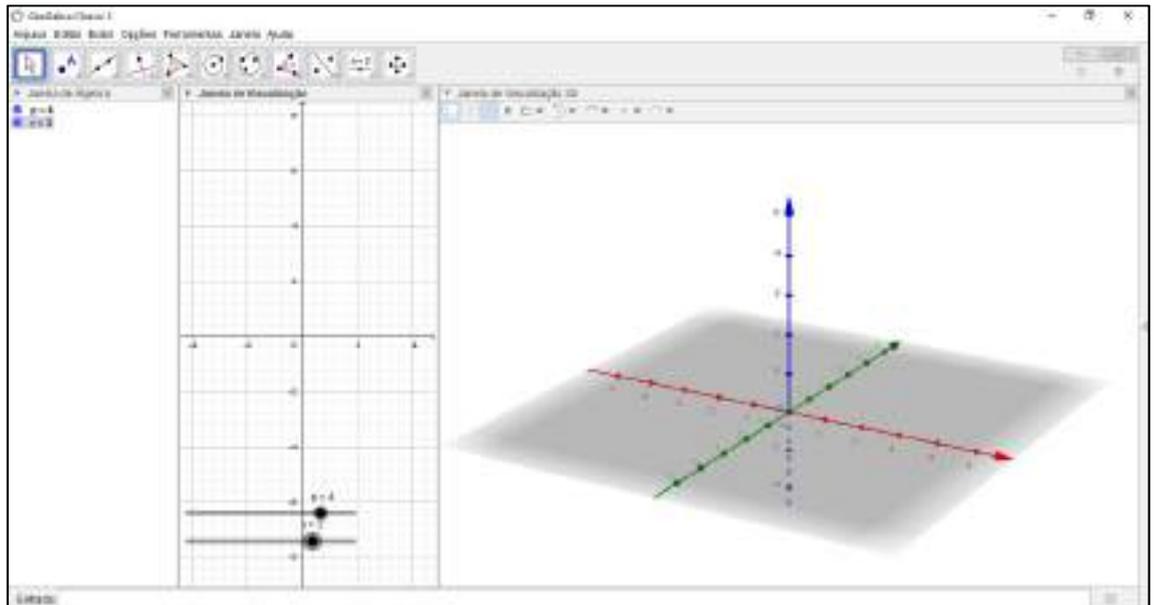
- (7) Em nome digite p (posição) e utilize a variação de min:0 e max:5. Clique em OK.



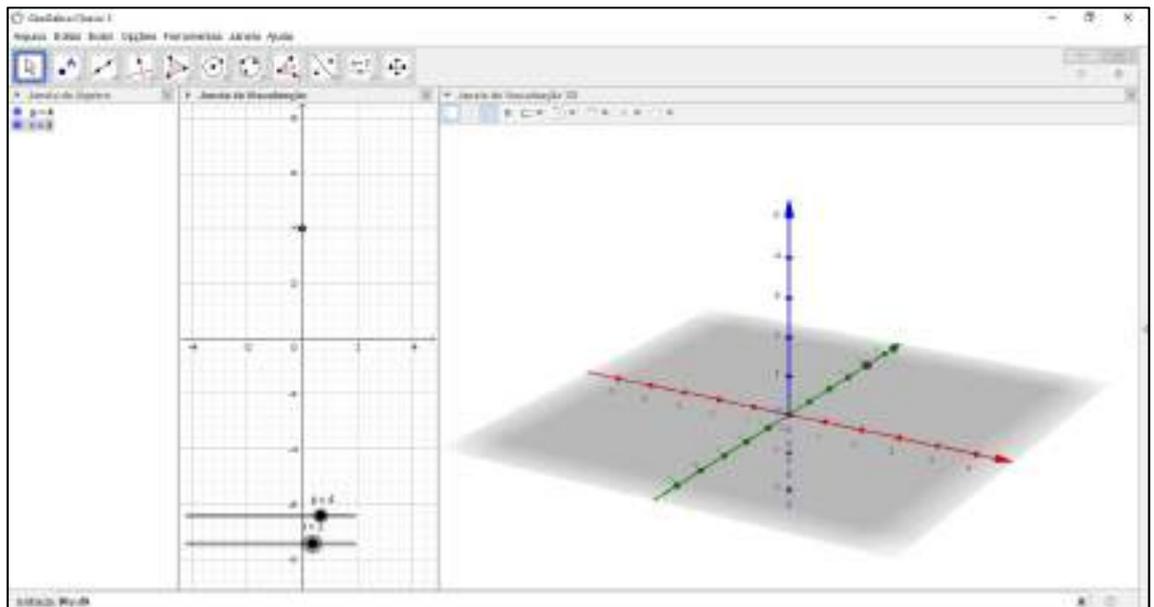
- (8) Com a ferramenta Controle Deslizante crie mais um controle. Desta vez, em nome digite r (raio) e utilize a variação de min:0 e max:p. Clique em OK.



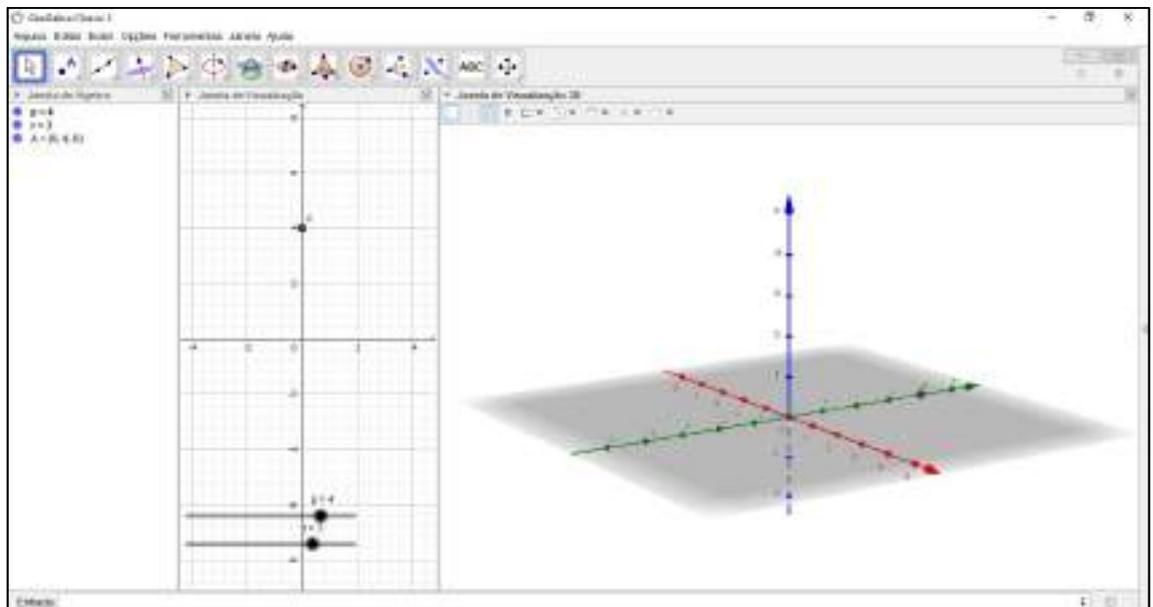
(9) Para padronizar, posicione os controles nos valores  $p=4$  e  $r=3$ .



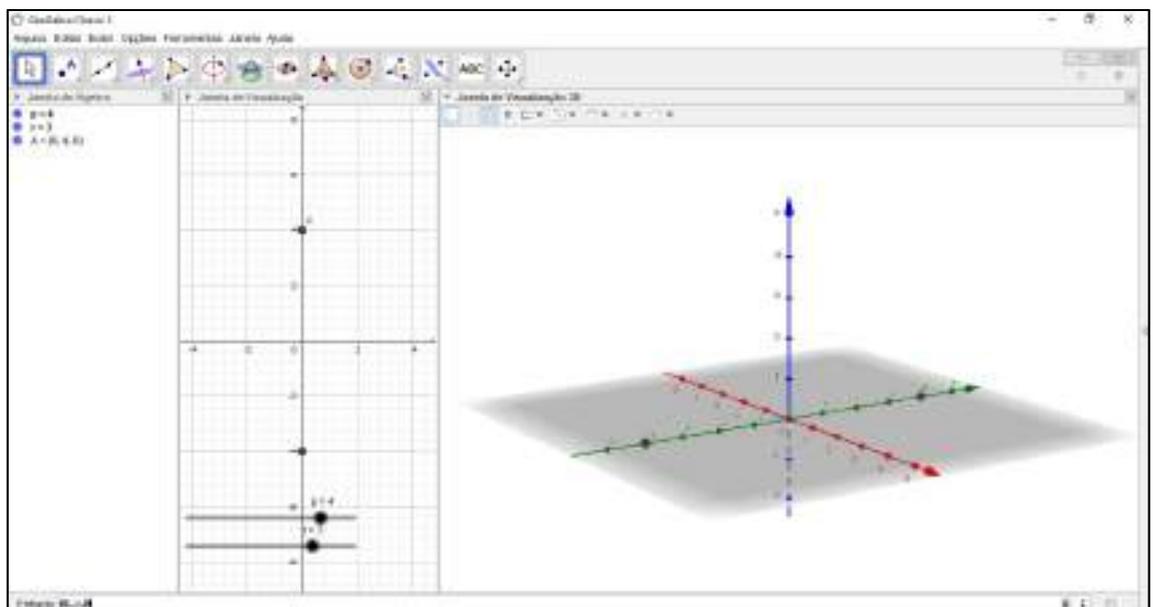
(10) Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite as coordenadas  $(0,p,0)$ .



- (11) Clicando na Janela de Visualização 3D com o mouse você consegue movimentar e girar a posição dos eixos para melhor visualização das construções, a qualquer momento.

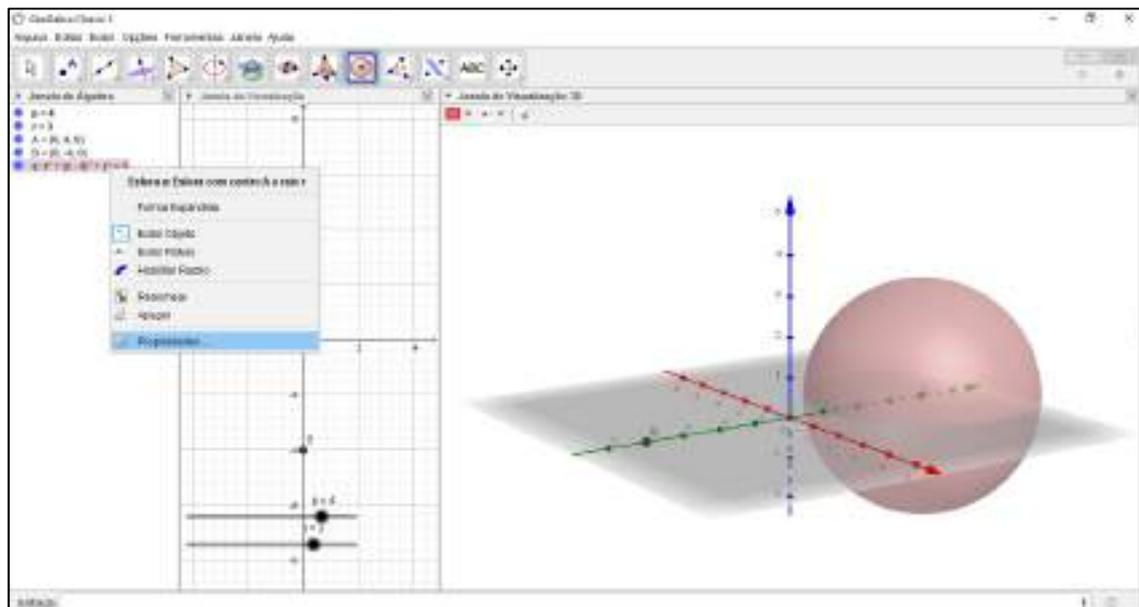


- (12) Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite as coordenadas  $(0,-p,0)$ .

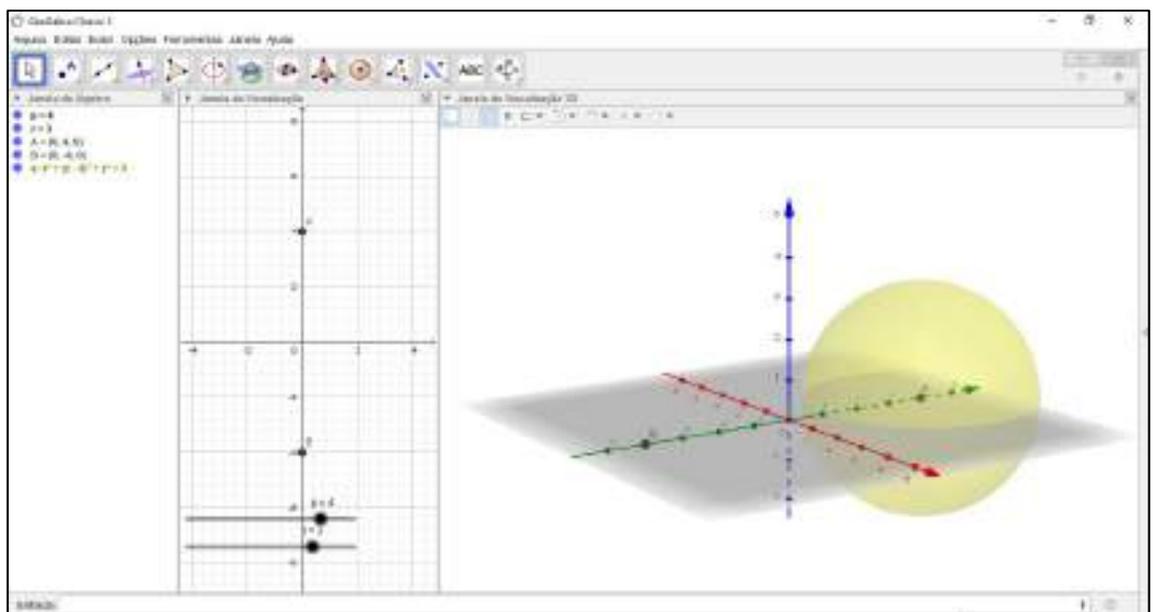
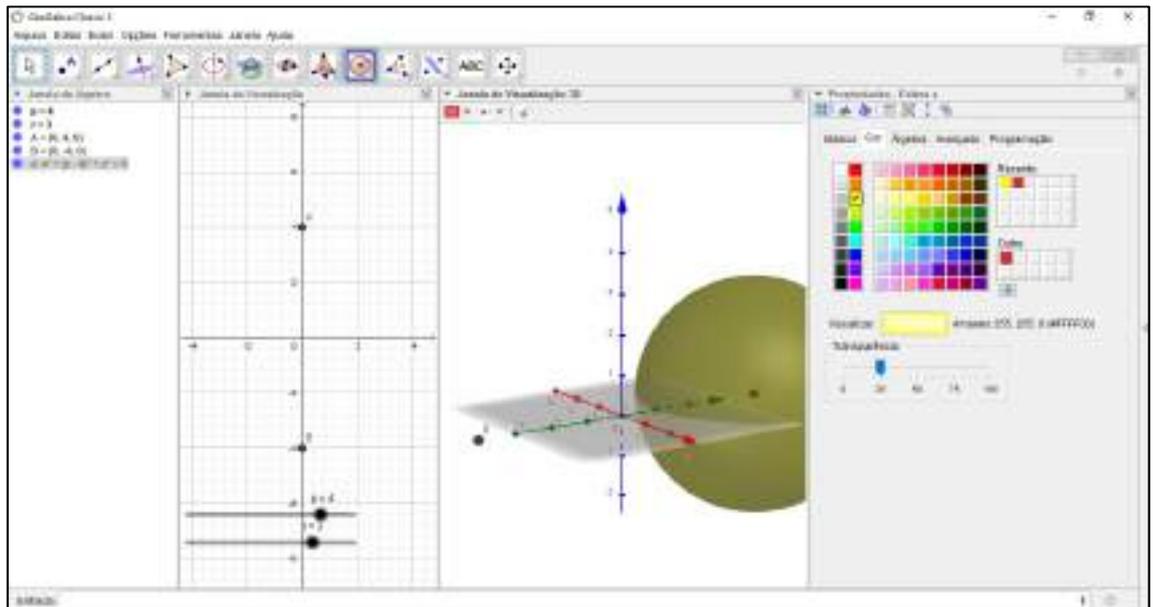




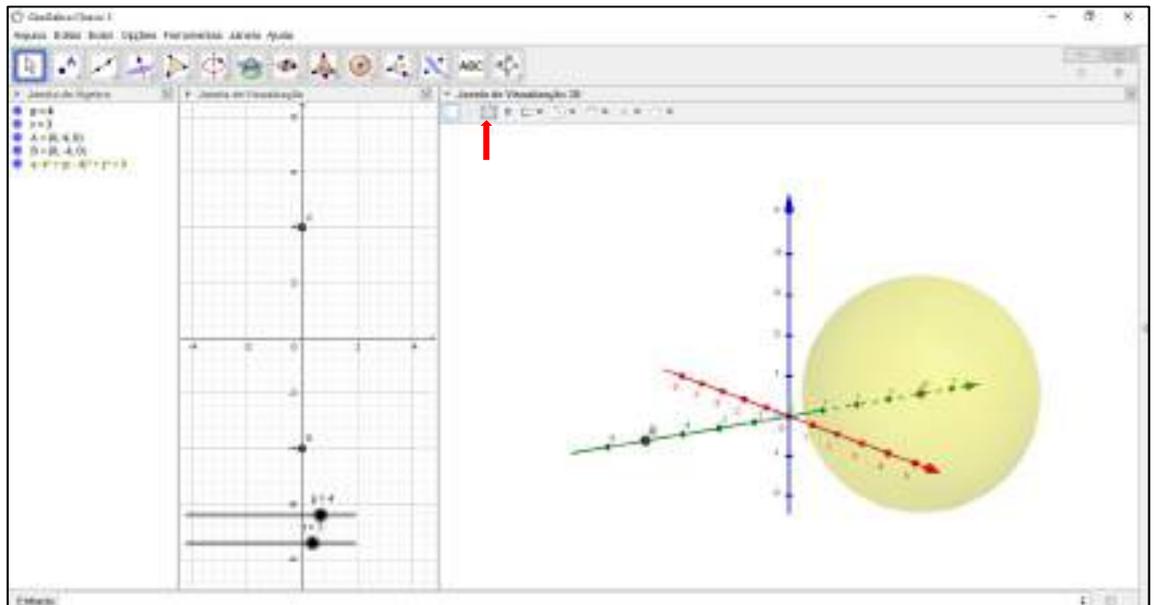
- (15) Clique Janela de Álgebra clique em cima da equação da esfera e selecione “Propriedades”.



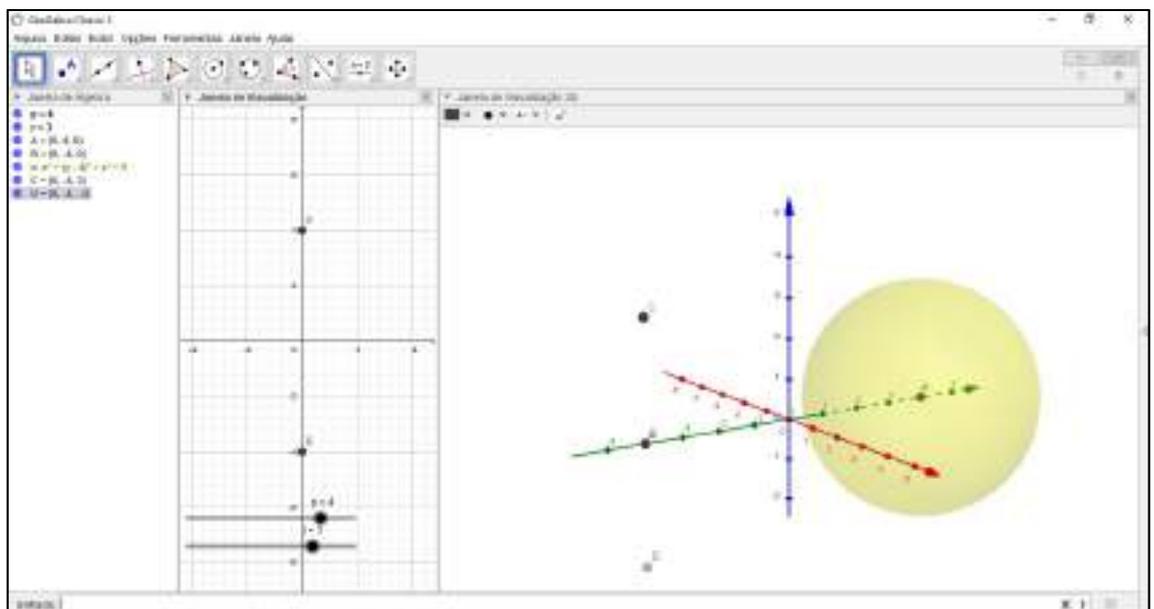
- (16) Na opção “Cor” selecione a cor amarelo e coloque a Transparência em 25, e na sequência feche a aba Propriedades.



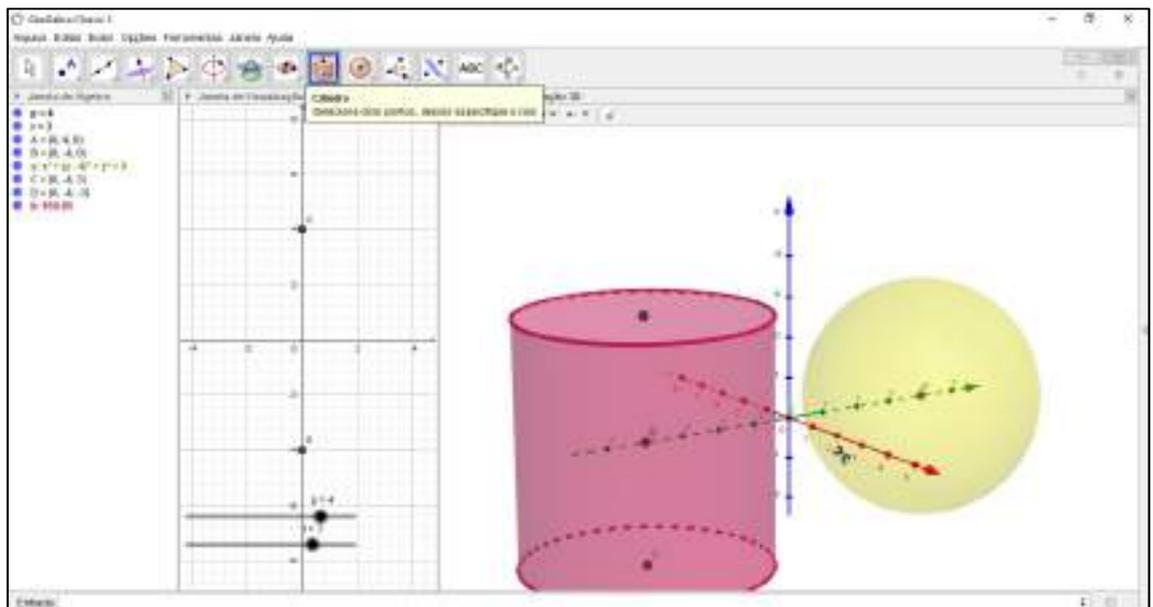
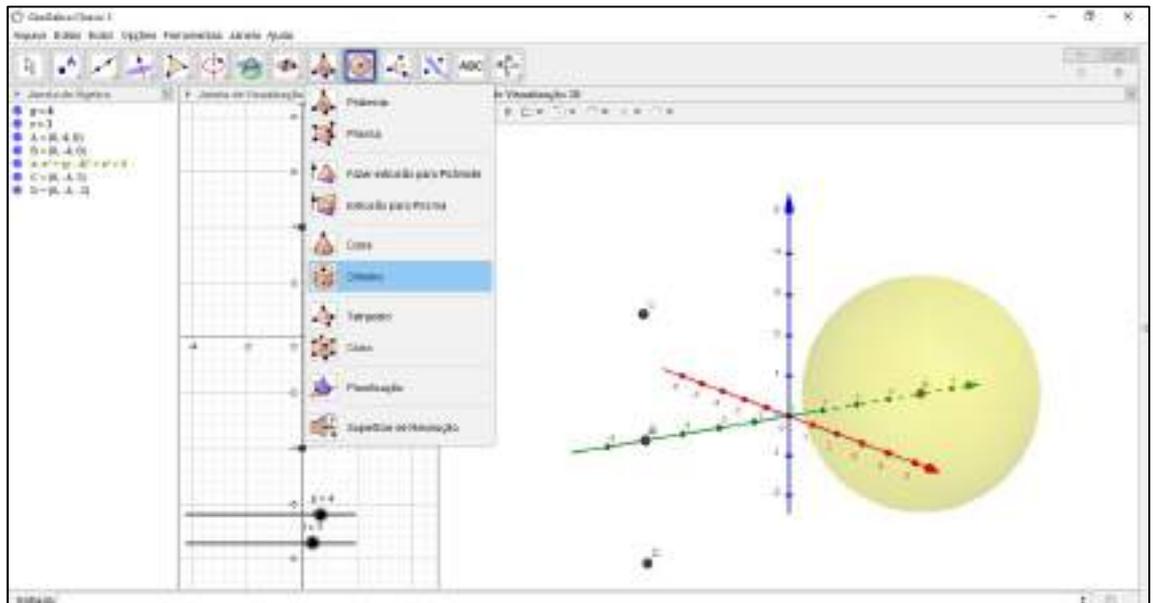
- (17) Em Janela de Visualização 3D clique em “Exibir ou esconder o plano xy” para esconder o plano xy.



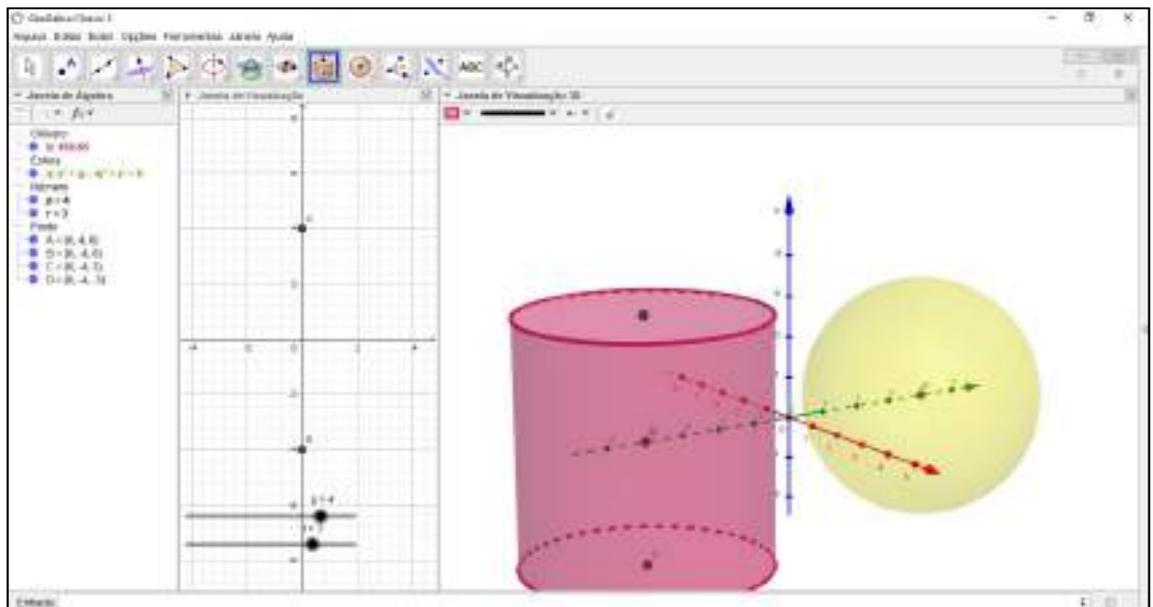
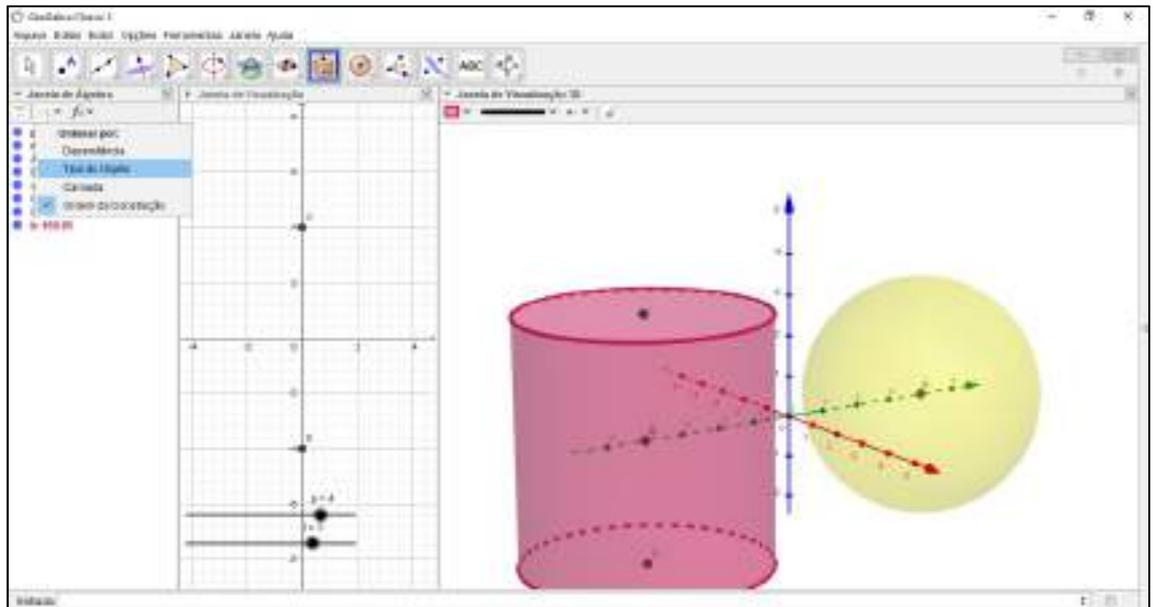
- (18) Vamos criar dois pontos (centros das bases do cilindro). Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite  $(0,-p,r)$ ; Na sequência digite  $(0,-p,-r)$ .



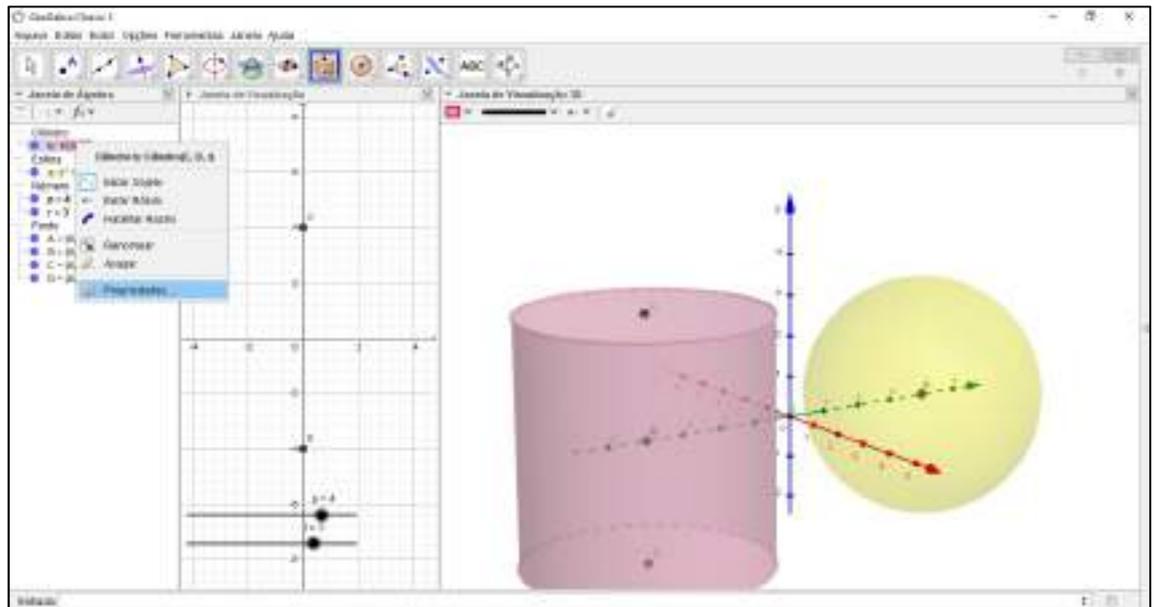
- (19) Clique na ferramenta “Cilindro” selecione os pontos C e D e na caixa de diálogo que abrir digite em raio “r”. Clique em OK.



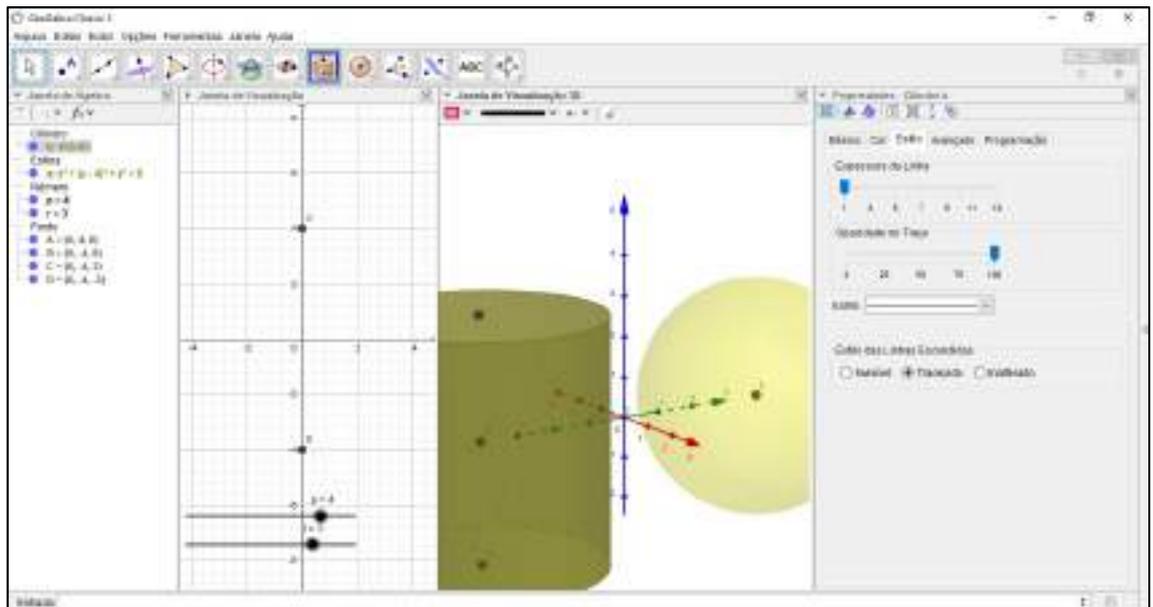
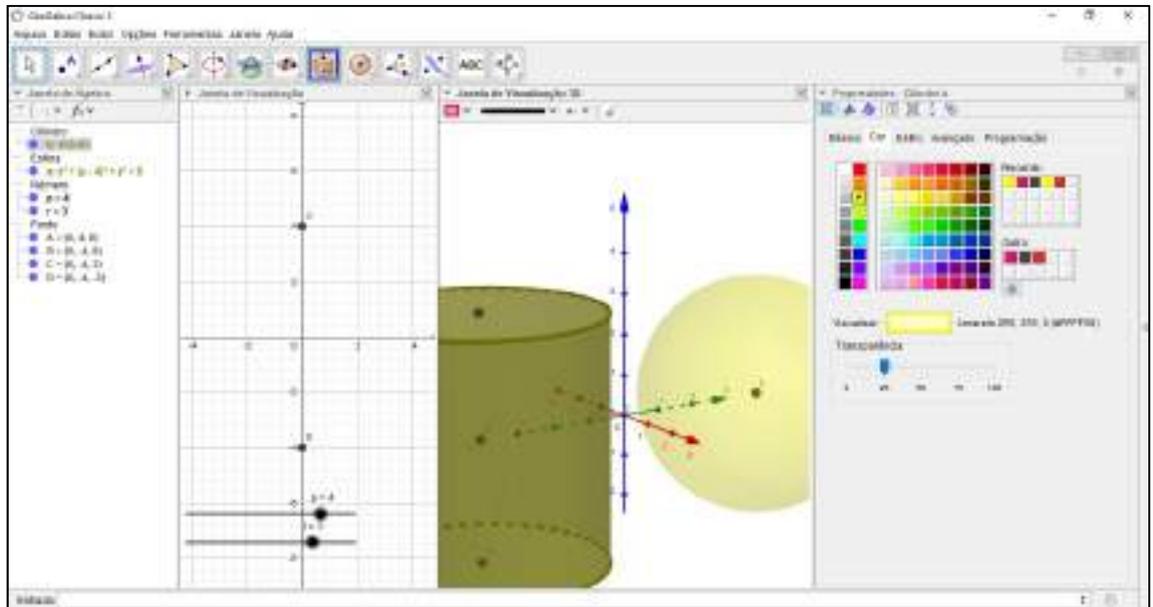
(20) Em “Janela de Álgebra” selecione a opção para Ordenar por “Tipo de Objeto”.



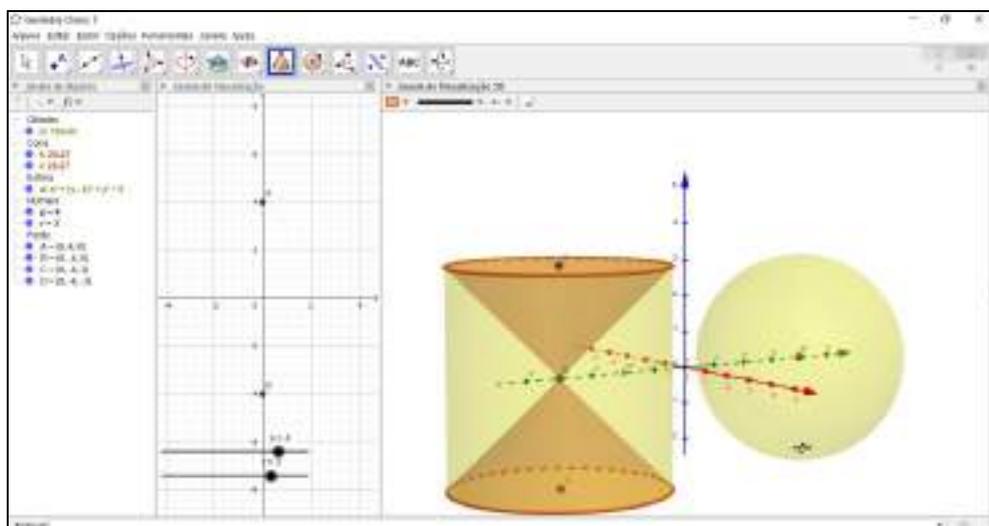
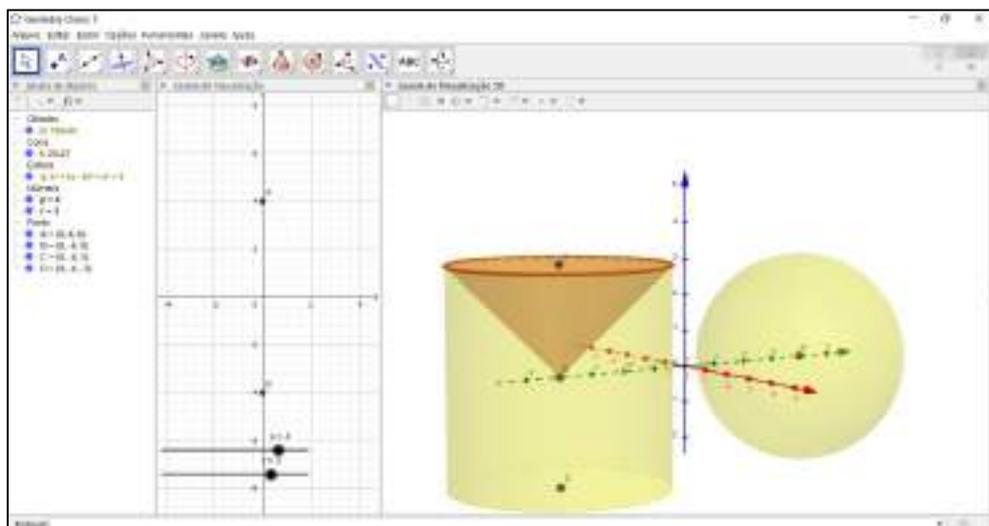
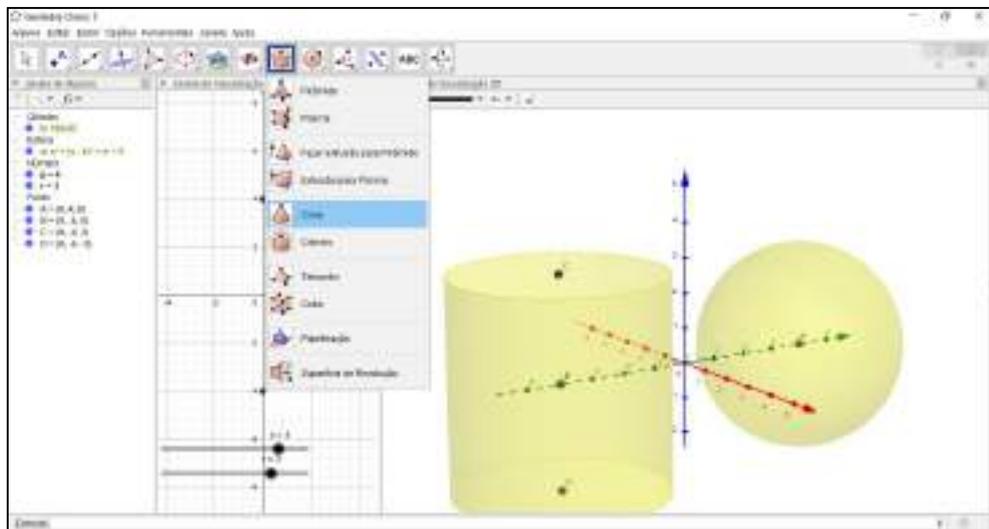
- (21) Na Janela de Álgebra clique em cima da equação do cilindro e selecione “Propriedades”.



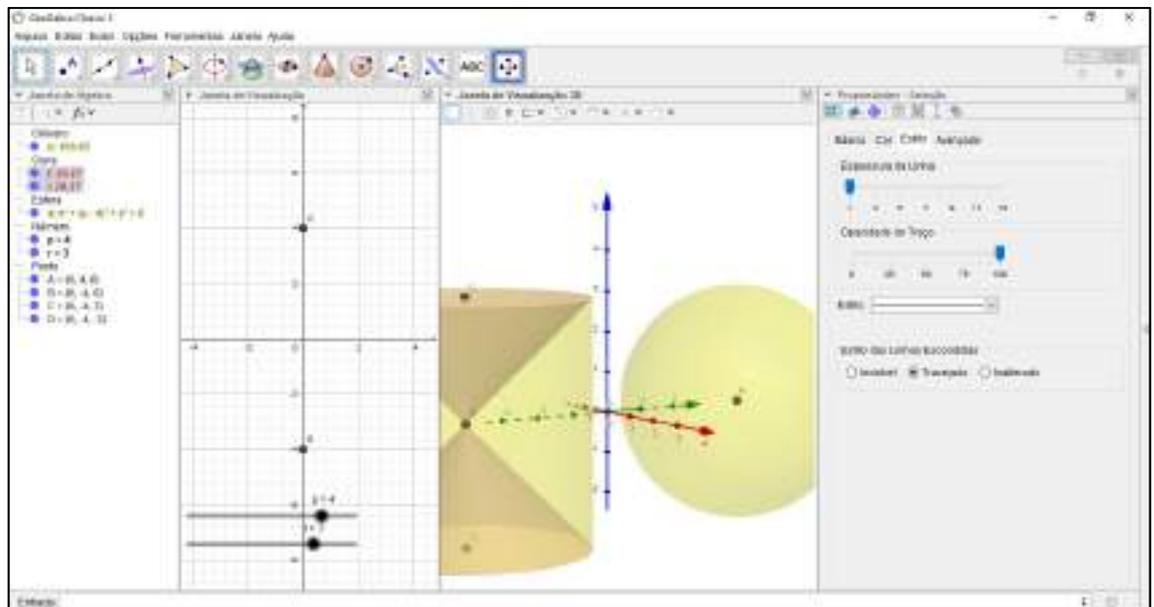
- (22) Na opção “Cor” selecione a cor amarelo e coloque a Transparência em 25; Em “Estilo” mude a “Espessura da Linha” para 1; Na sequência feche a aba Propriedades.



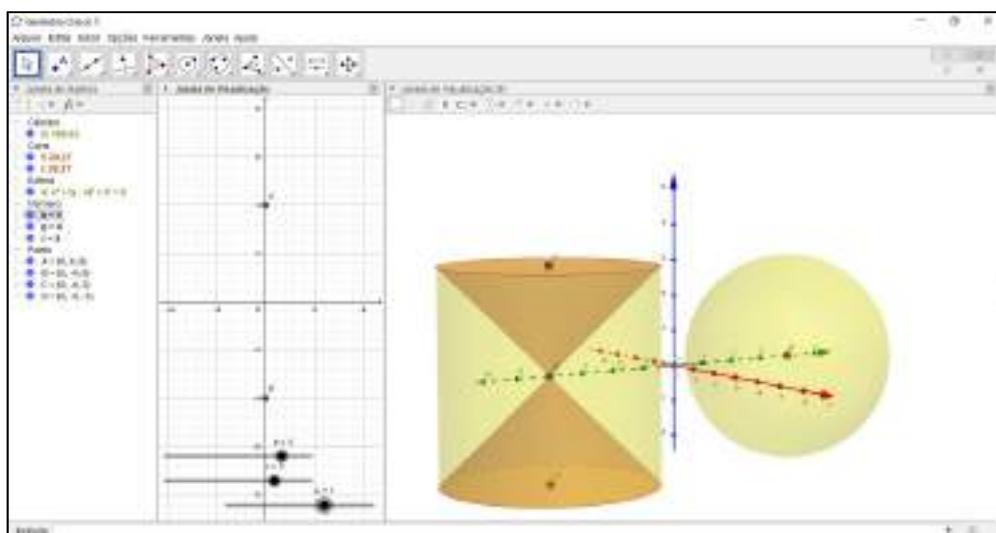
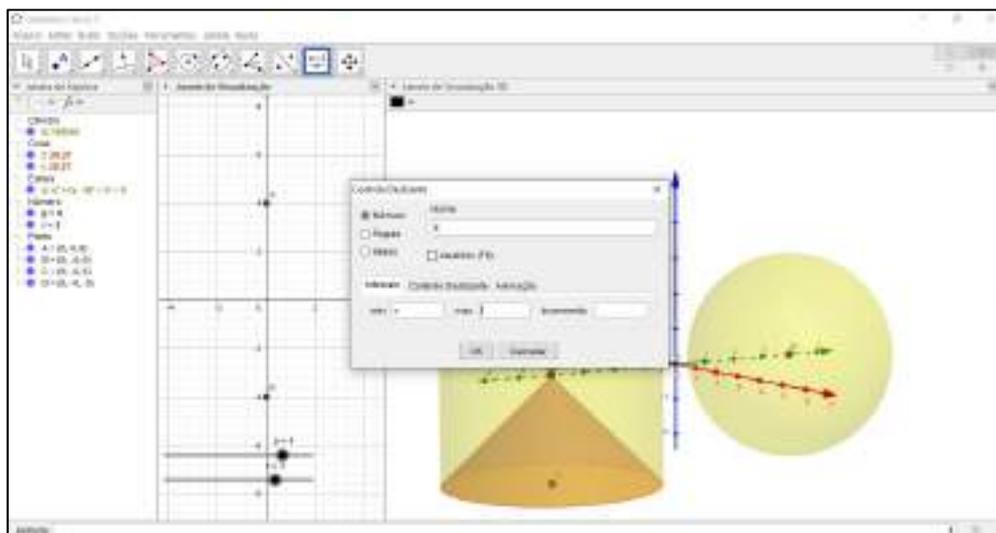
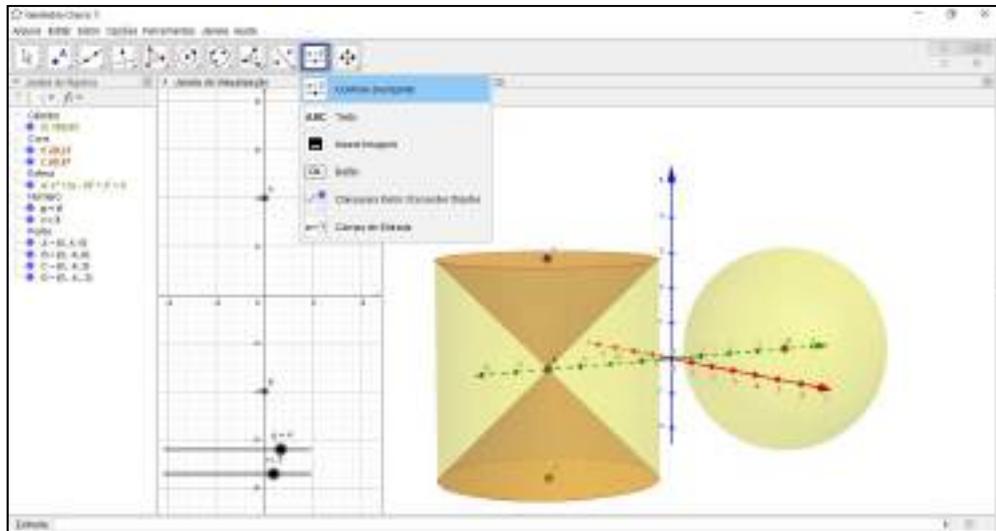
- (23) Com a ferramenta “Cone” selecione os pontos C, B e na janela que abrir digite r. Da mesma forma, selecione os pontos D, B e na janela que abrir digite r. Clique OK.



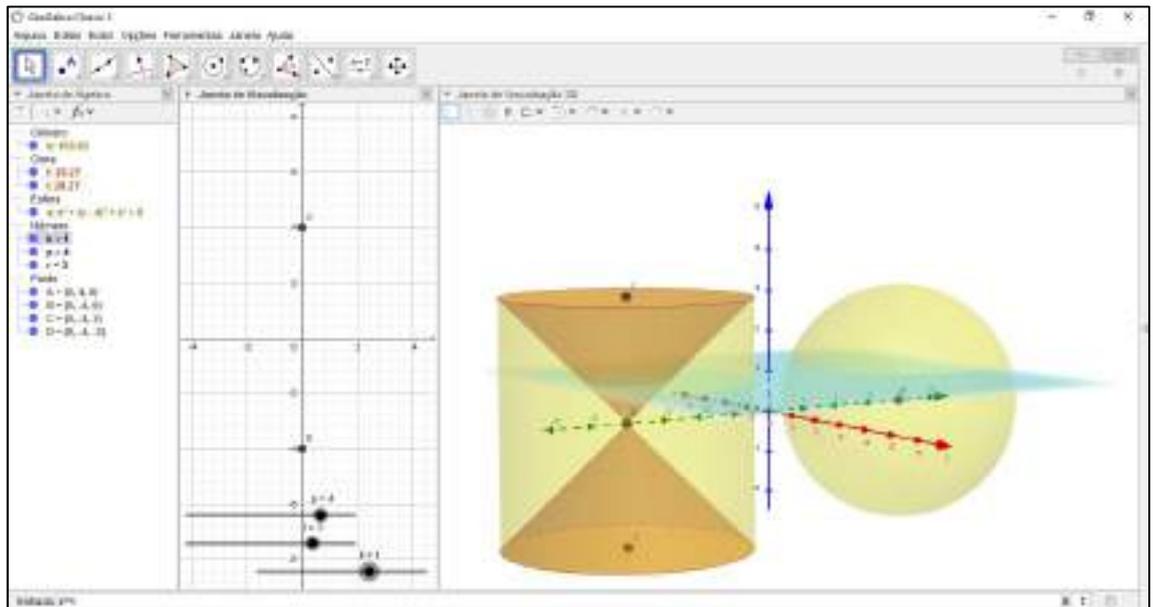
- (24) Na Janela de Álgebra clique em cima das equações do cones e selecione “Propriedades”. Em “Estilo” mude a “Espessura da Linha” para 1; Na sequência feche a aba Propriedades.



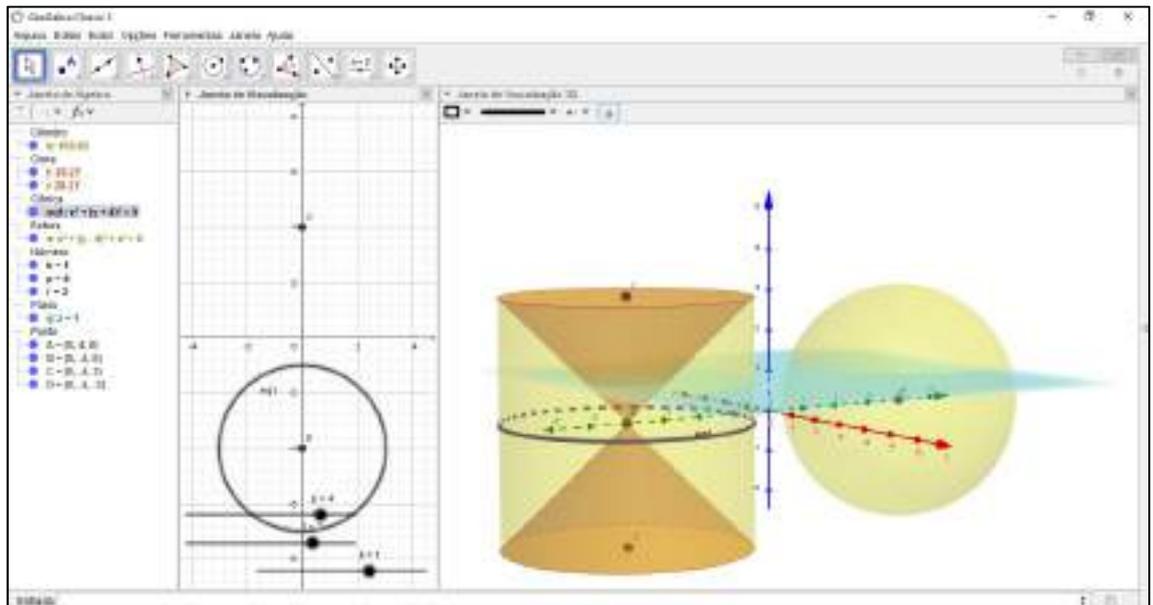
- (25) Na janela de visualização 2D clique na ferramenta “Controle Deslizante”. Em nome digite k; No intervalo de variação digite min:-r e max:r. Clique em OK.



- (26) Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite a equação do plano  $z=k$ .



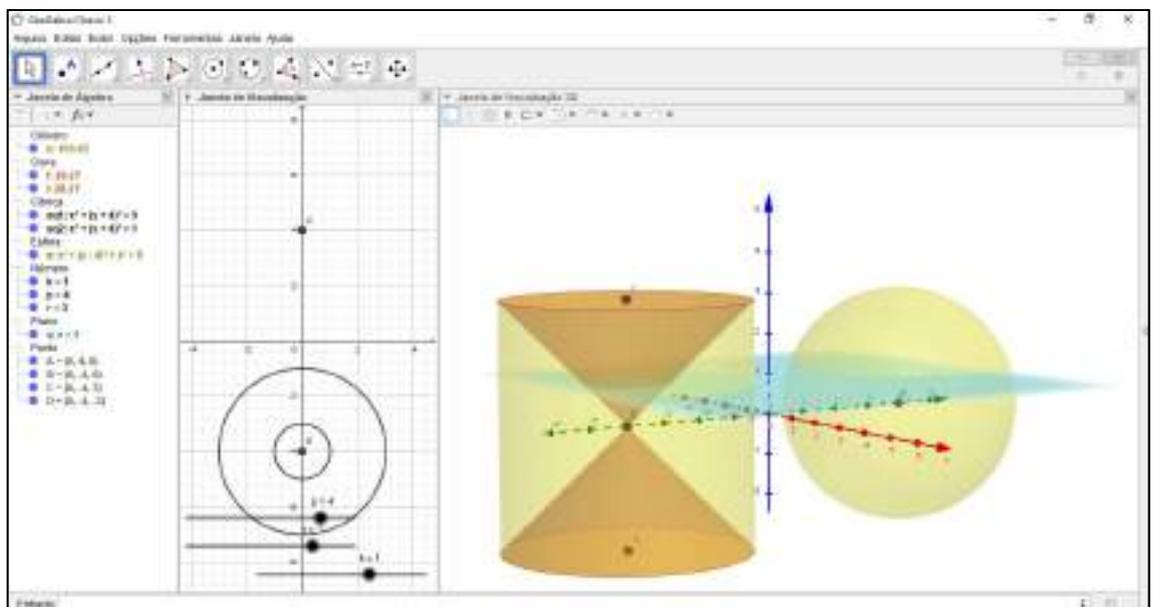
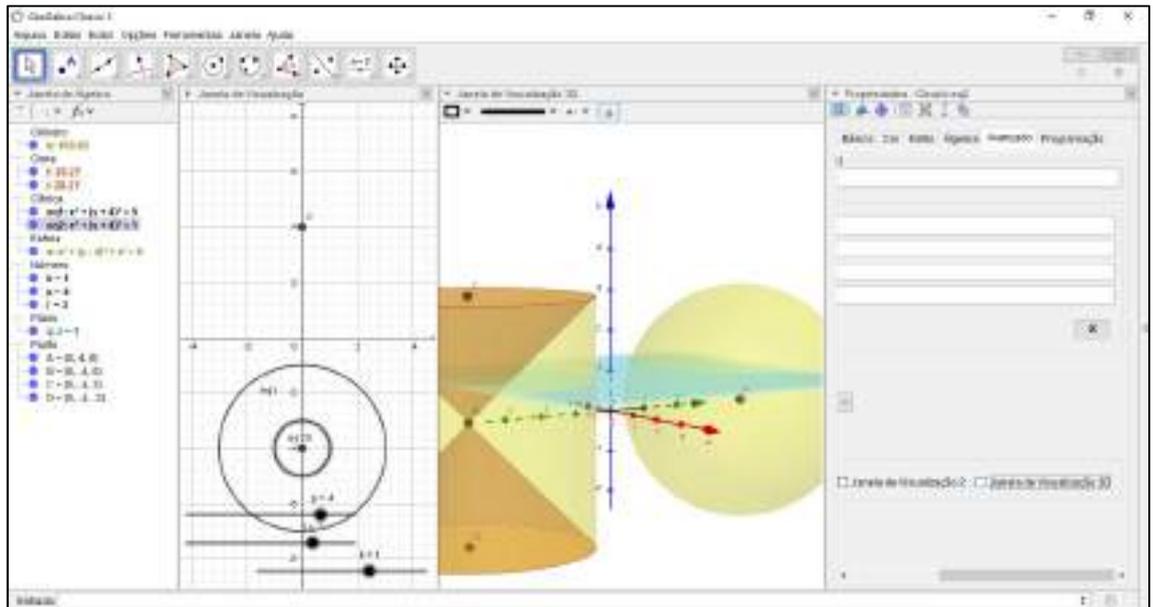
- (27) Com a Janela de Visualização 2D selecionada, em “Entrada” digite  $(x-0)^2+(y+p)^2=r^2$ . Enter.





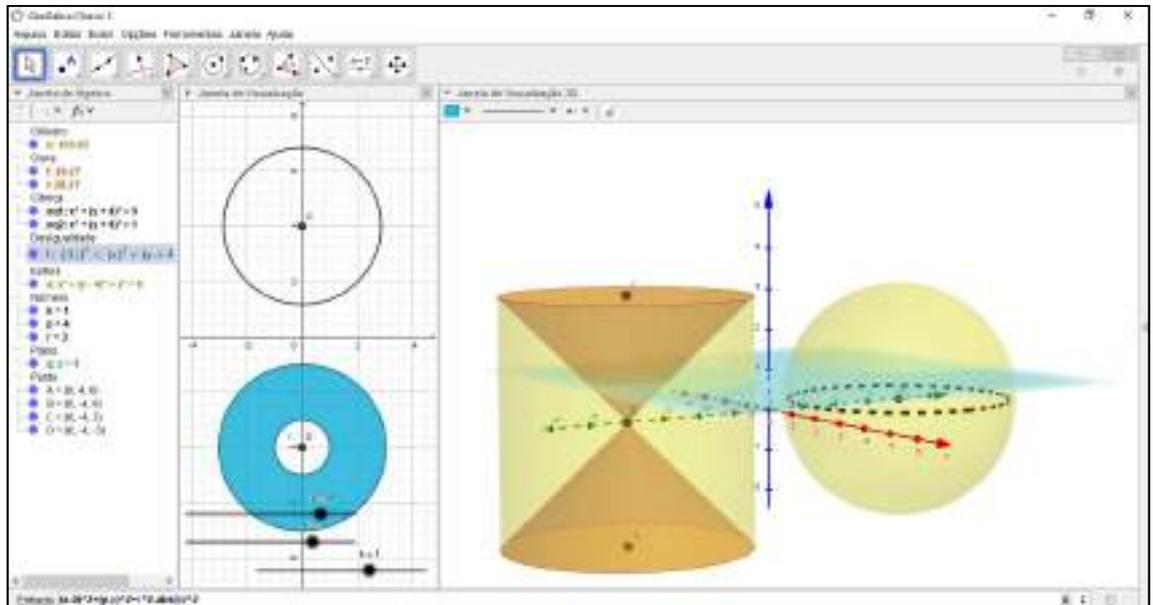


- (30) Novamente, para ocultar o círculo no ambiente 3D: em Janela de Álgebra clique em cima da equação da circunferência com o botão direito do mouse, e em “Avançado” e desmarque em “Localização” a opção de Janela de visualização 3D; Fechar; Oculte os rótulos de eq1 e eq2 clicando em cima das equações dos círculos e desabilitando o exibir rótulo na Janela de Álgebra.

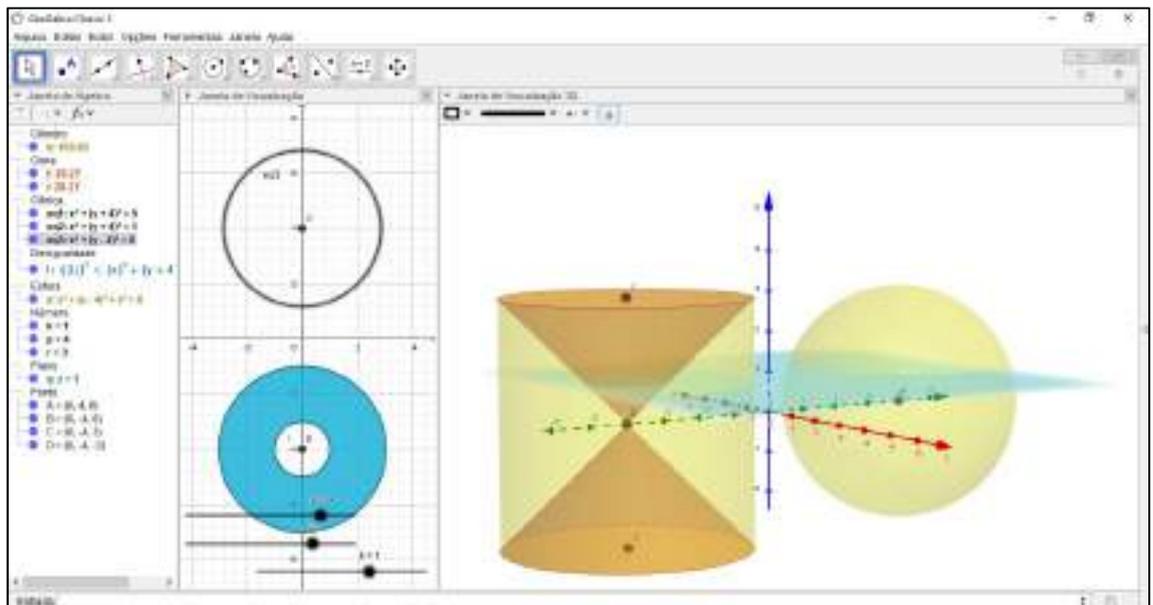




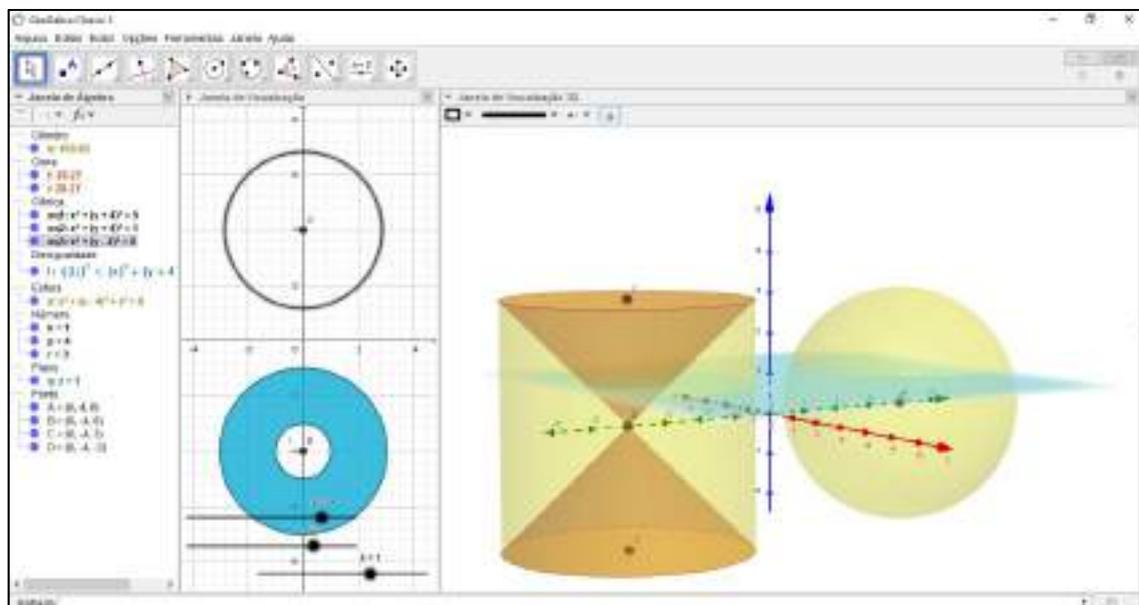
- (33) Com a Janela de Visualização 2D selecionada, em “Entrada” digite  $(x - 0)^2 + (y - p)^2 = r^2 - \text{abs}(k)^2$ . Enter.



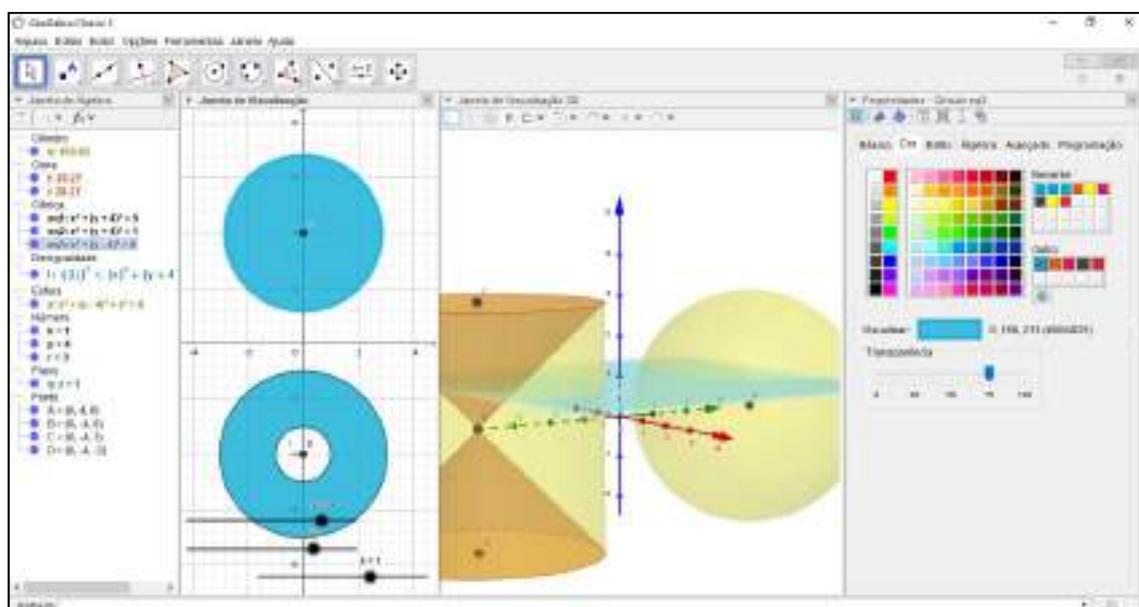
- (34) Novamente, para ocultar o círculo no ambiente 3D: em Janela de Álgebra clique em cima da desigualdade com o botão direito do mouse, e em “Avançado” e desmarque em “Localização” a opção de Janela de visualização 3D. Fechar.



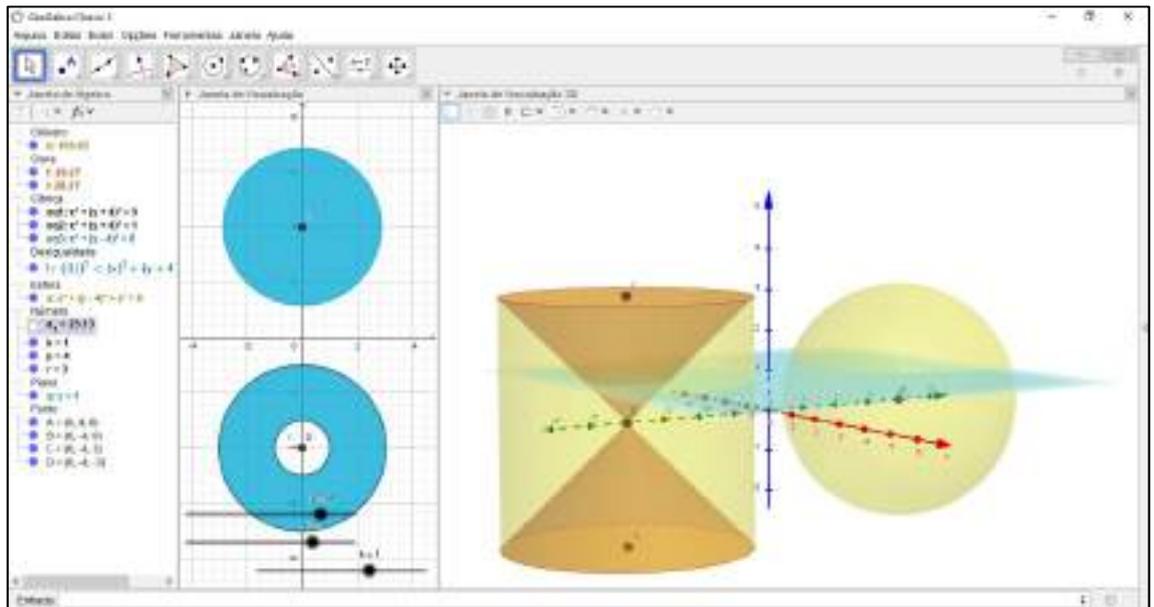
- (35) Oculte o rótulo de eq3 clicando em cima da equação do círculo e desabilitando o "exibir rótulo" na Janela de Álgebra.



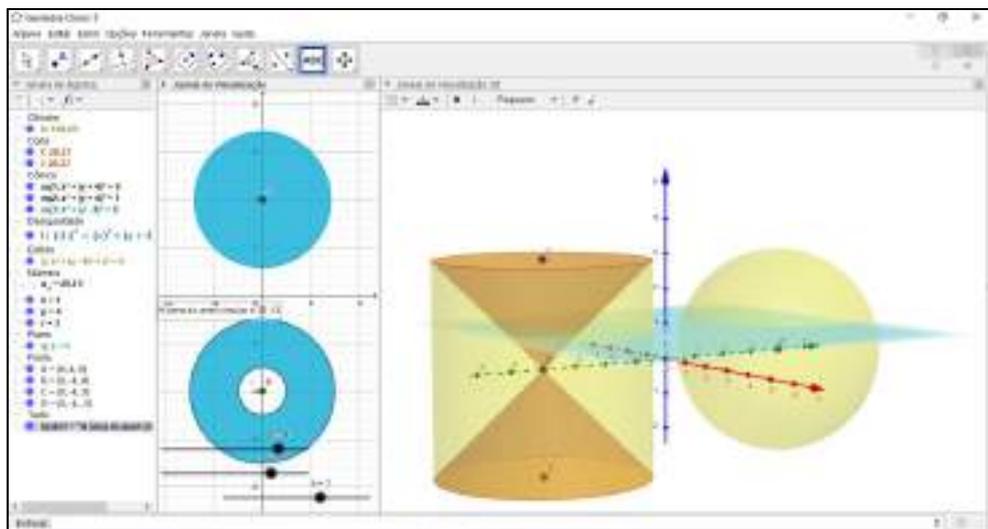
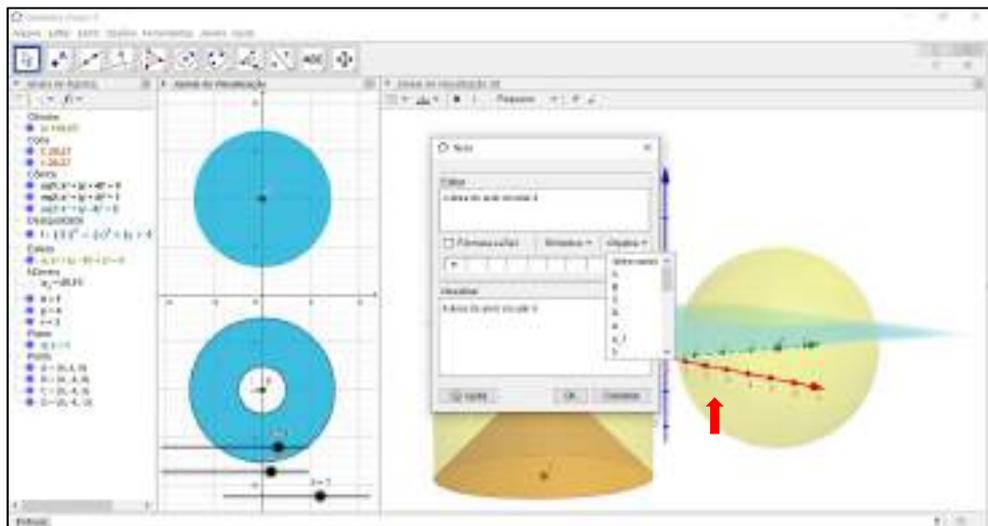
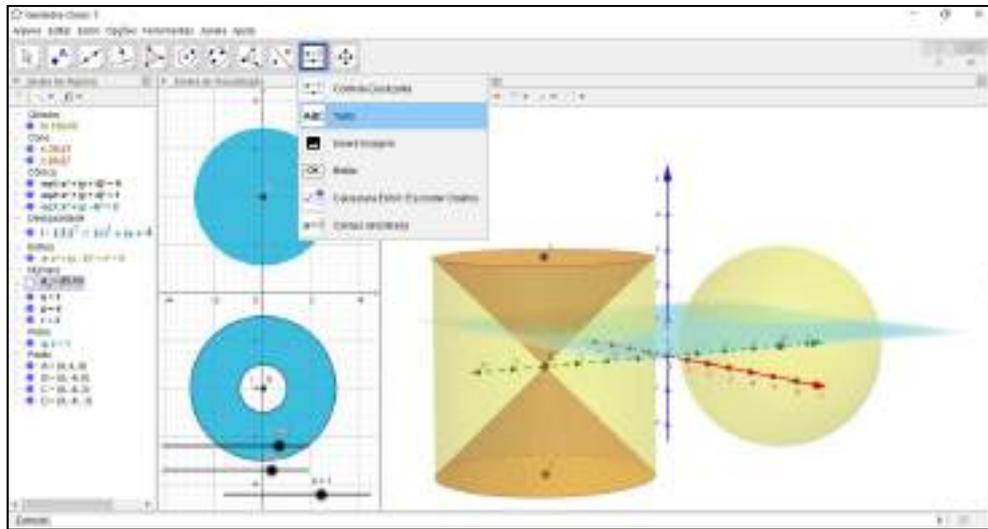
- (36) Ainda sobre a equação eq3, clicando em "Propriedades" selecione na aba "Cor" a cor azul e a Transparência 75. Fechar.



(37) Em “Entrada” digite  $a_1 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot \text{abs}(k)^2$  para obtermos a área do anel. Enter.

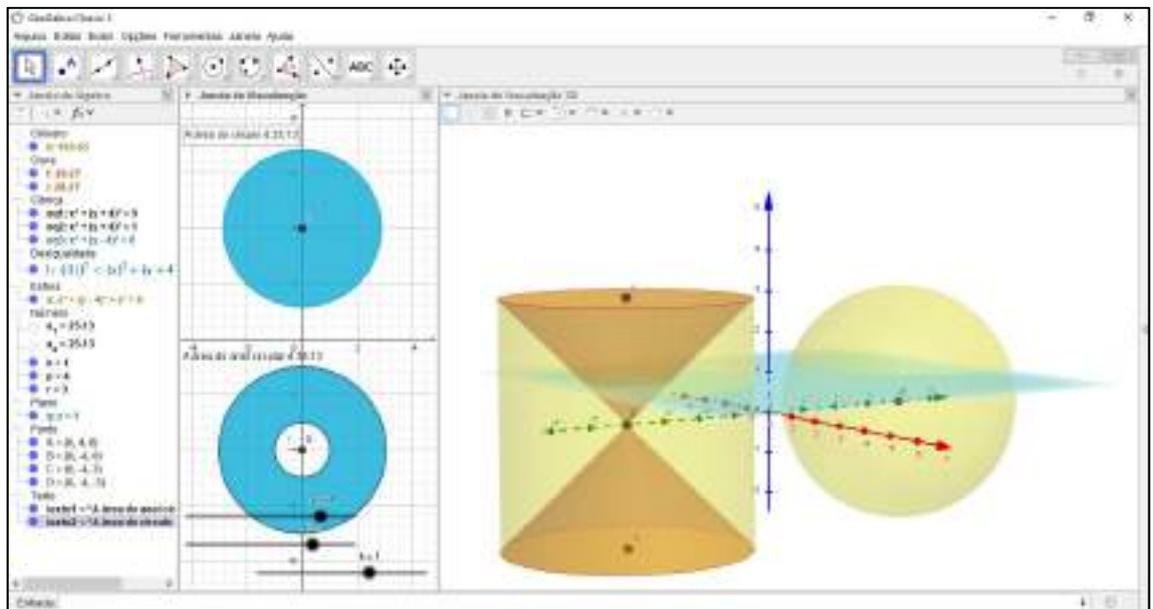
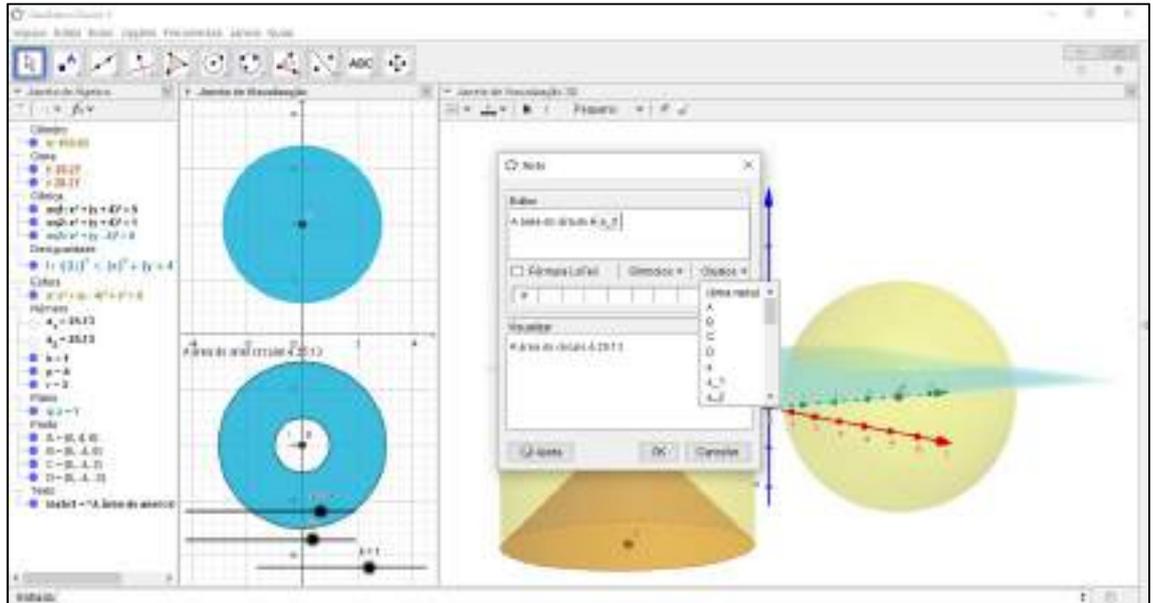


- (38) Selecione a ferramenta “Texto” e clique na Janela de Visualização 2D. Ao abrir a janela, em “Editar” digite “A área do anel circular é” e ao lado deste texto selecione em “Objetos” o “a\_1”. Clique em OK.

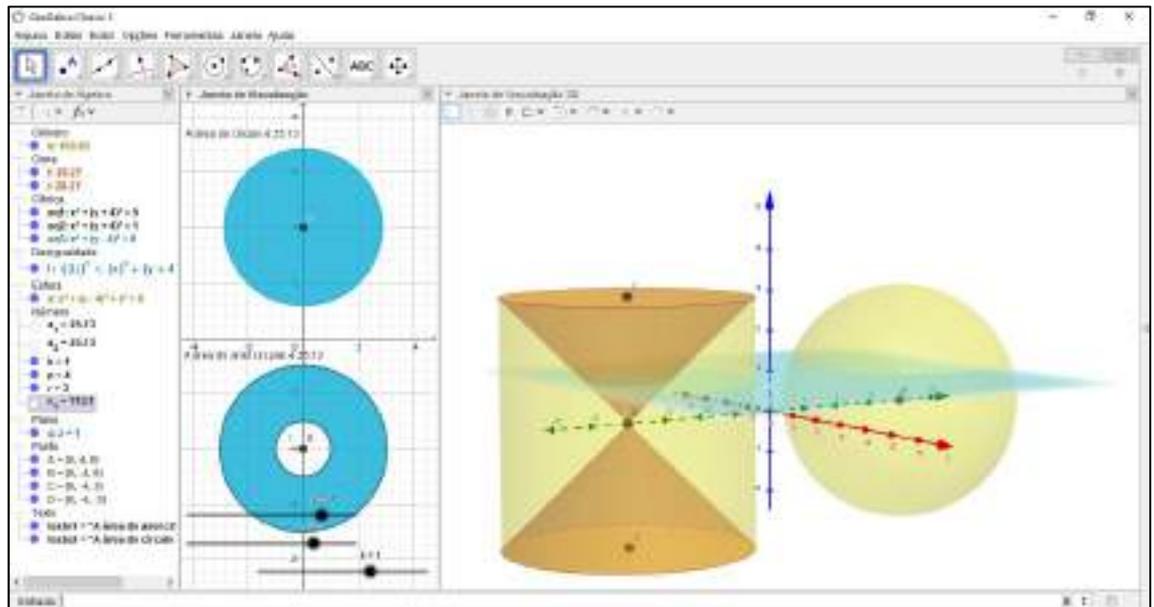


(39) Em “Entrada” digite  $a_2 = \pi \cdot (r^2 - \text{abs}(k)^2)$  para obtermos a área do círculo. Enter.

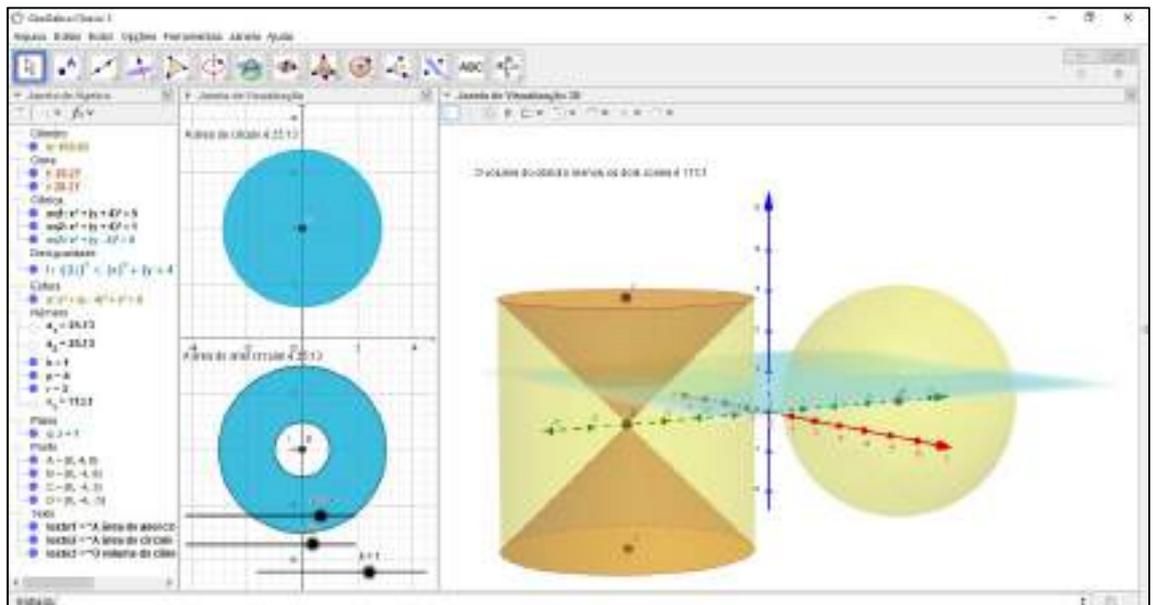
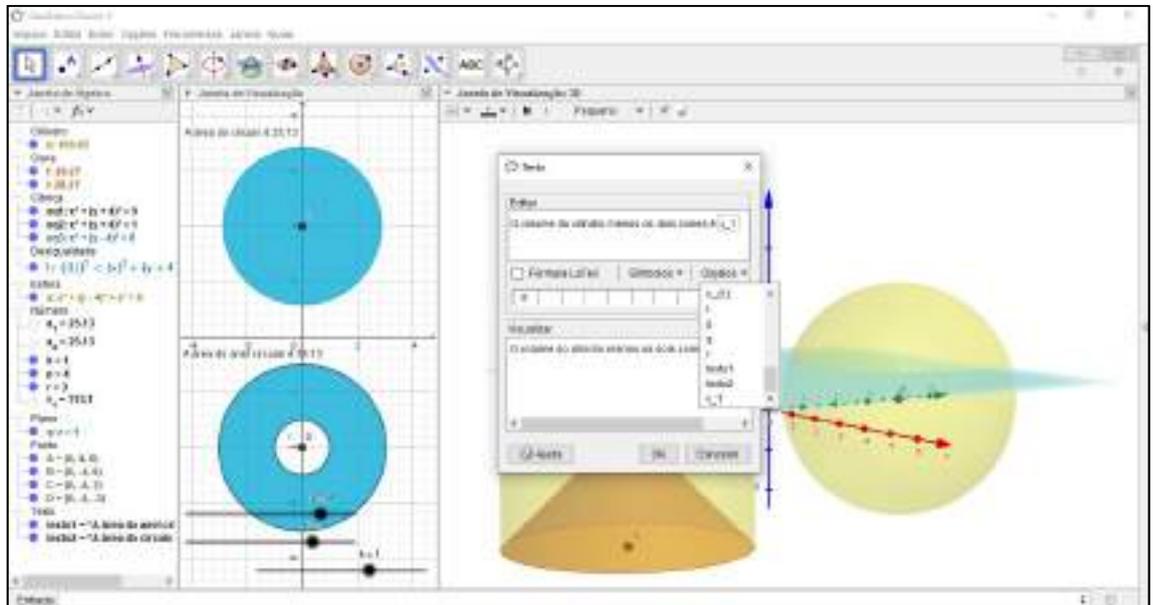
(40) Selecione a ferramenta “Texto” e clique na Janela de Visualização 2D. Ao abrir a janela, em “Editar” digite “A área do círculo é” e ao lado deste texto selecione em “Objetos” o “a\_2”. Clique em OK.



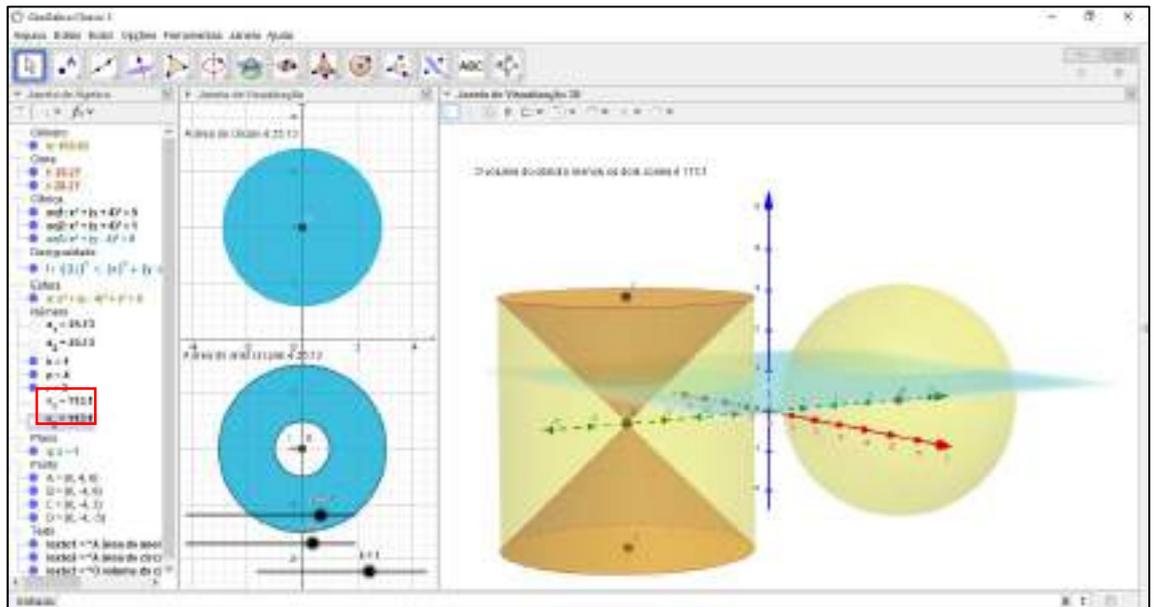
- (41) Em “Entrada” digite “  $v_1=b-2*f$  ” (sem “”) para representar o volume do cilindro menos os dois cones. Enter.



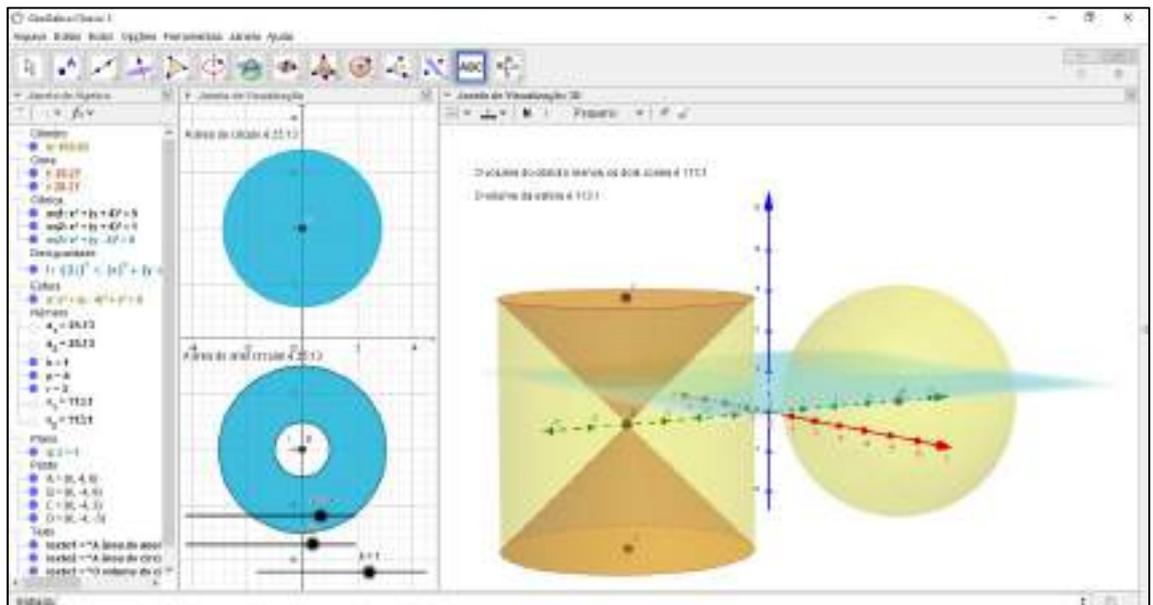
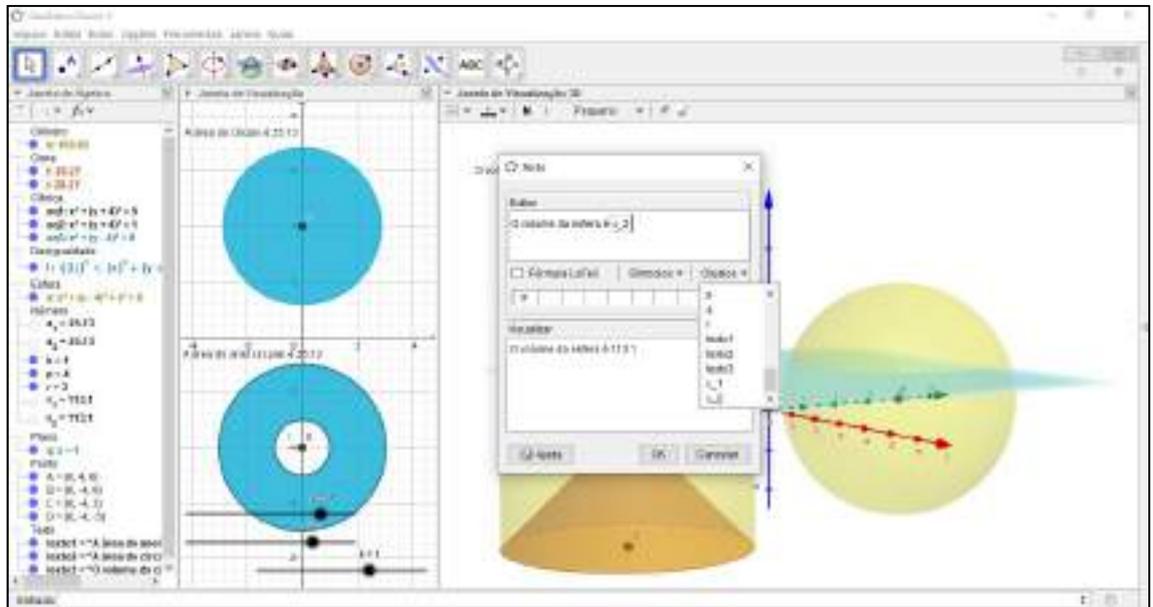
- (42) Selecione a Janela de Visualização 3D, selecione “Texto” e clique na janela. Na caixa em “Editar” digite “ O volume do cilindro menos os dois cones é ” e ao lado deste texto selecione em “Objetos” o “v\_1”. Clique em OK.



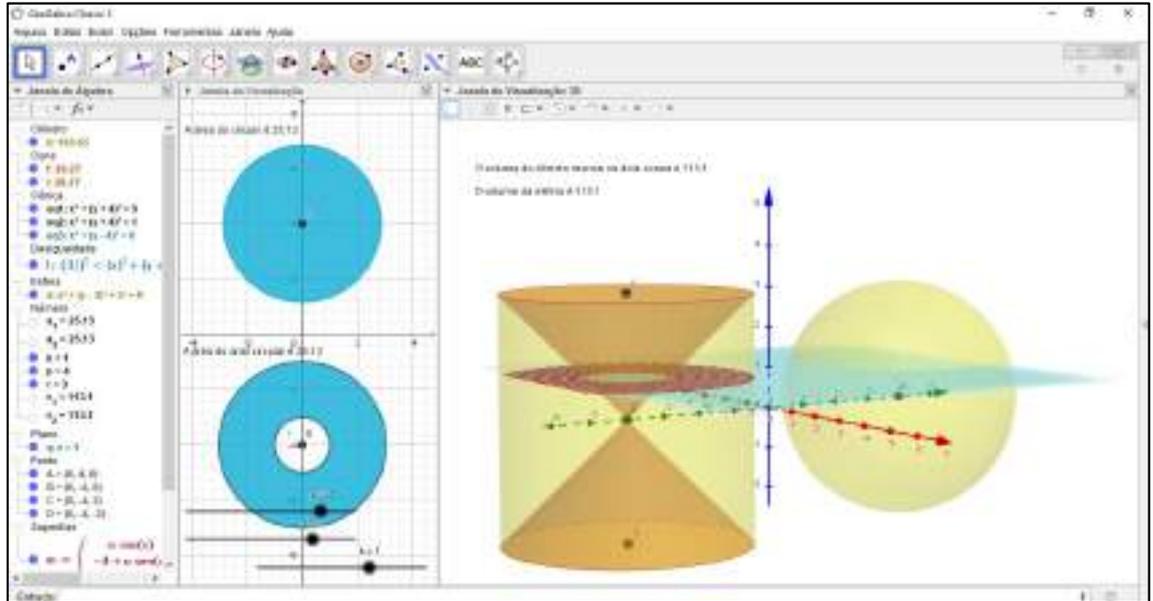
- (43) Em “Entrada” digite “  $v_2=4*\pi*r^3/3$  ” (sem “”) para representar o volume da esfera. Enter.



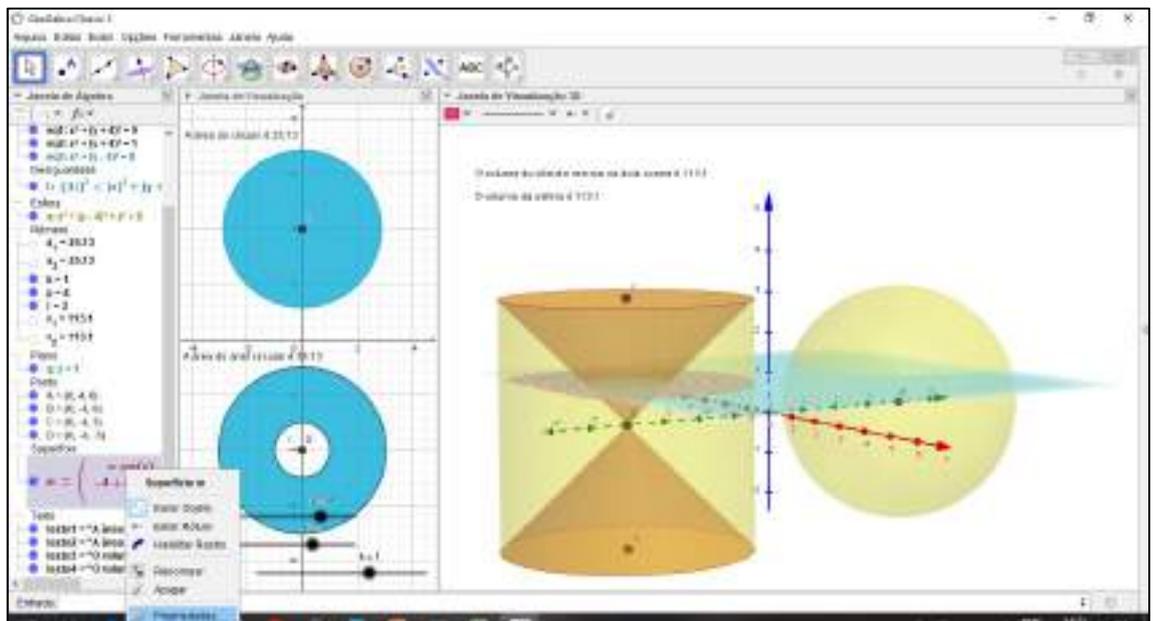
- (44) Selecione a Janela de Visualização 3D, selecione “Texto” e clique na janela. Na caixa em “Editar” digite “ O volume da esfera é ” e ao lado deste texto selecione em “Objetos” o “v\_2”. Clique em OK.



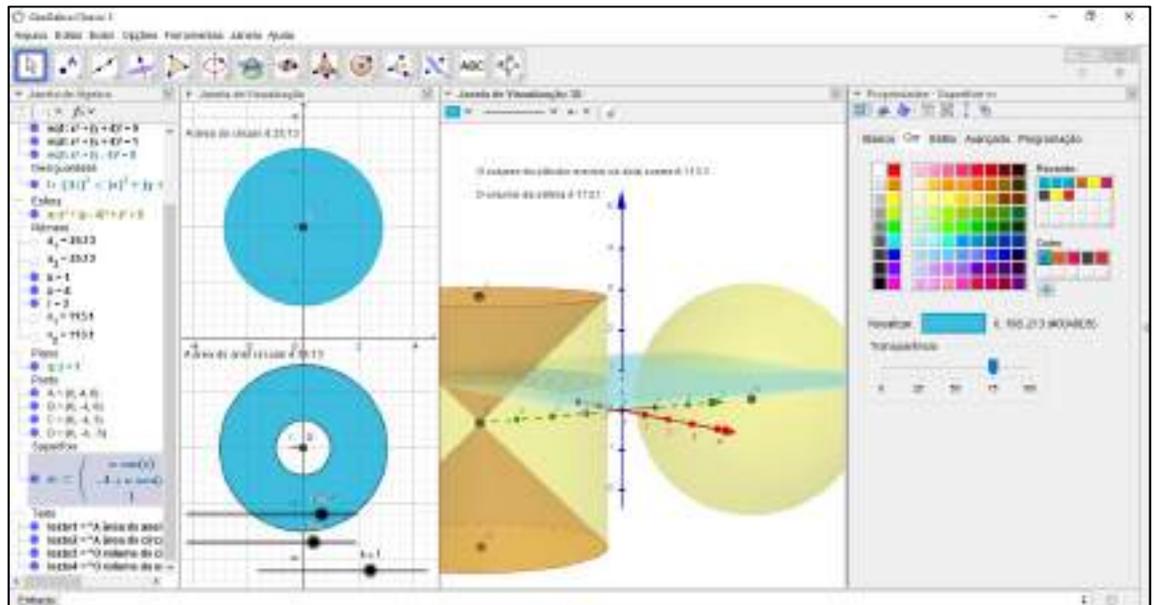
- (45) **Opcional:** Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite “ Superfície( u cos(v), -p+u sen(v), k, u, abs(k), r, v, 0, 2\*pi ) ” para fazer o anel em coordenadas cilíndricas.



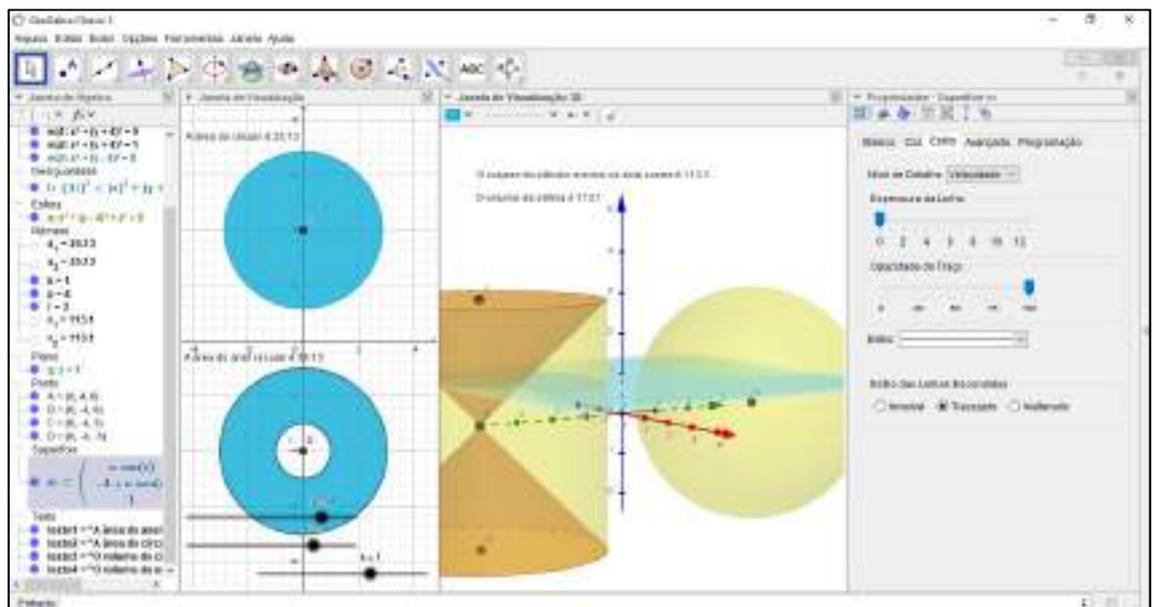
Em Janela de Álgebra clique em cima da Superfície com o botão direito do mouse, e em “Propriedade”.



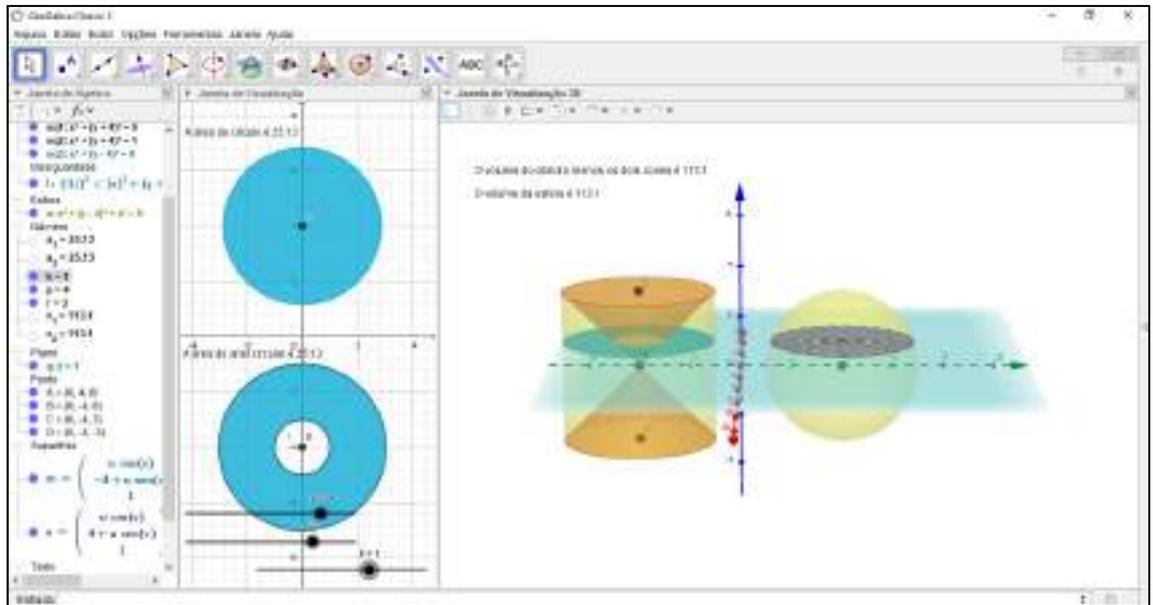
Em “Cor” coloque a cor azul.



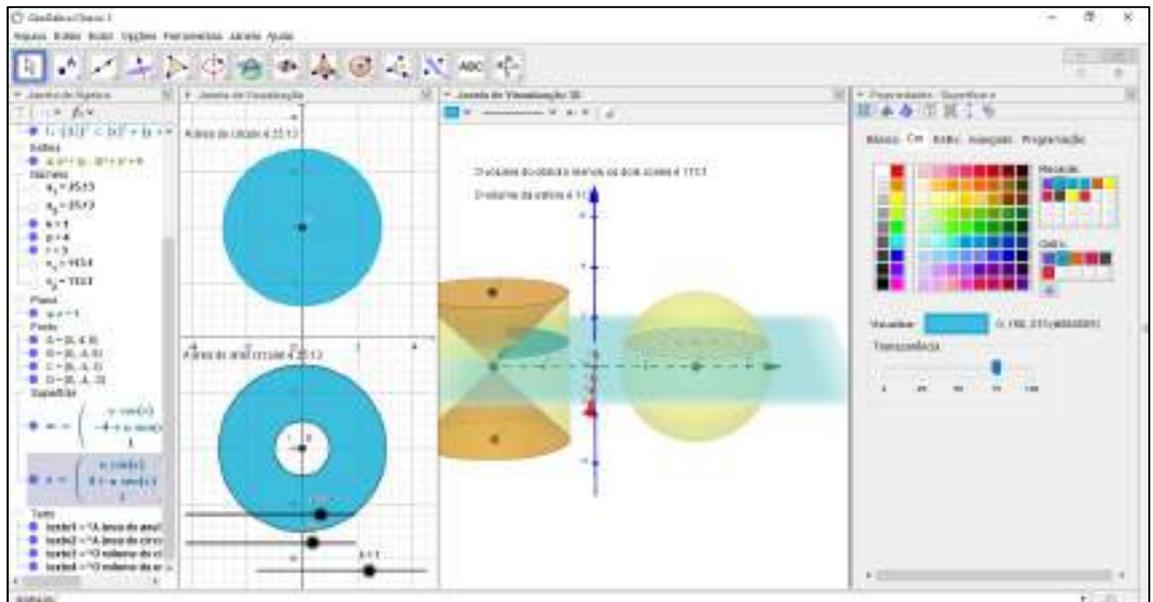
Em “Estilo” coloque a “Espessura da linha” em 0. Fechar.



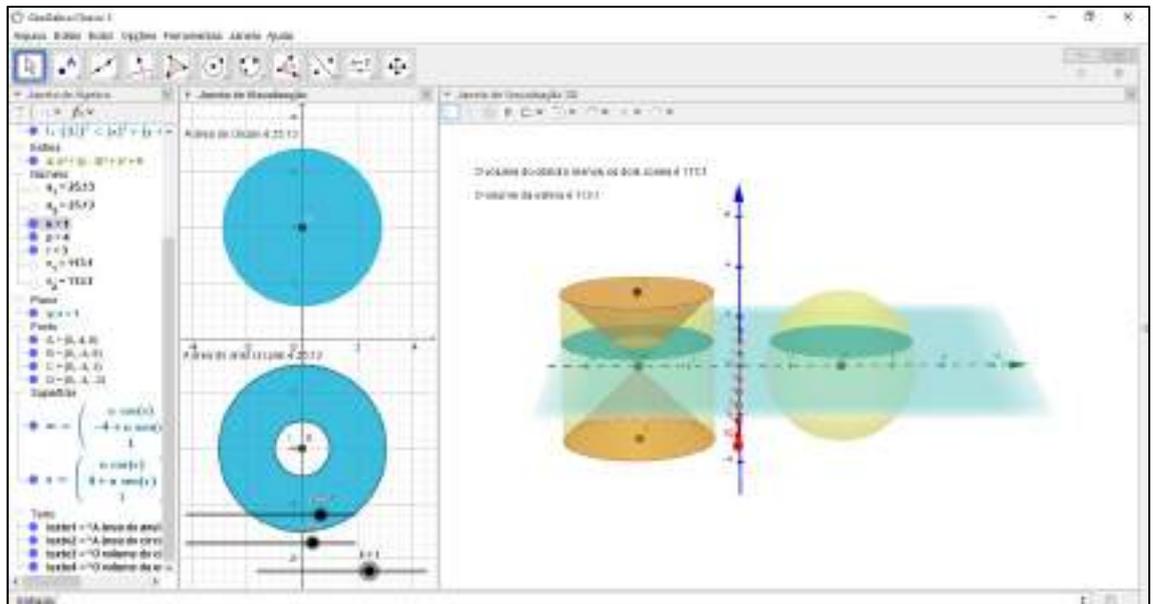
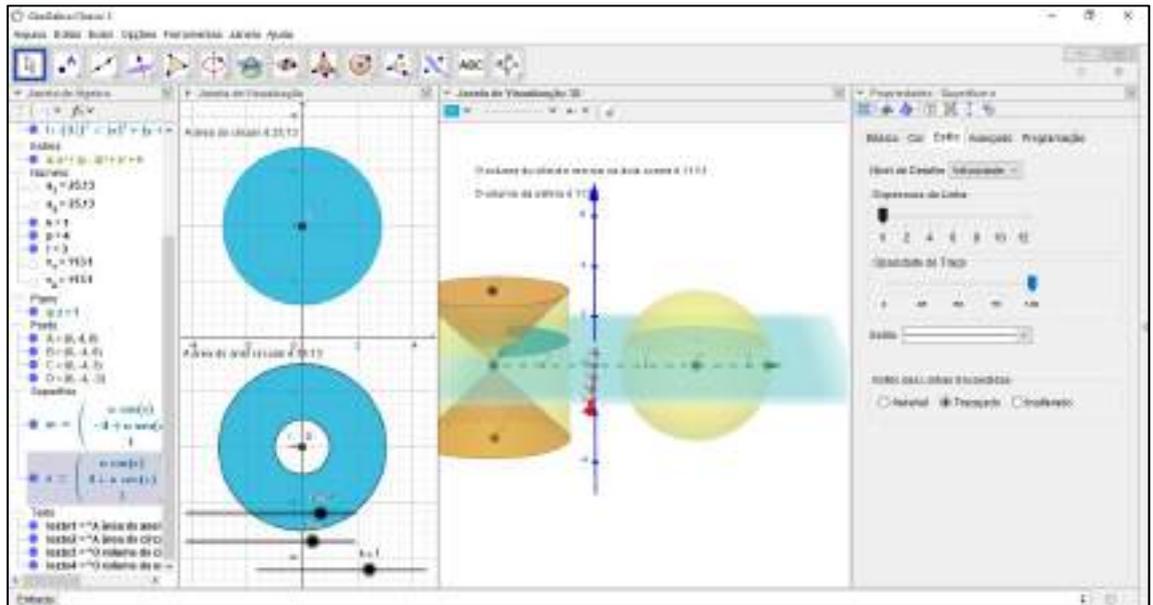
Vamos fazer procedimento semelhante para fazer o disco em coordenadas cilíndricas. Com a Janela de Visualização 3D selecionada, em “Entrada” digite “Superfície( u cos(v), p+u sen(v), k, u, 0, sqrt(r^2-k^2), v, 0, 2\*pi )”.



Em Janela de Álgebra clique em cima da Superfície com o botão direito do mouse, e em “Propriedade”. Em “Cor” coloque a cor azul.



Em “Estilo” coloque a “Espessura da linha” em 0. Fechar.



Com essa construção conseguimos ilustrar o Princípio de Cavalieri (que é uma consequência do Teorema de Fubini, que envolve integrais múltiplas) onde utilizamos o volume do cilindro e o volume do cone para deduzir o volume da esfera.

Agora você poderá dizer que uma esfera é igual a um cilindro menos dois cones.

Ou ainda, que **um cilindro é igual a uma esfera mais dois cones!**

(Curiosidade: Veja a ilustração da capa do livro “A Matemática do Ensino Médio” Volume 2 da SBM.)

