Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

3. Elipsa – přehled číslíček, souřadnic a rovnic

Žán Pól Kastról

26. července 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

1 Číslíčka a vzorce

Tvar a velikost elipsy jsou dány slavnou pěticí číslíček (obr. 1):

$$\boxed{a, b, e, p, \varepsilon}$$

Nazývají se

1. a – hlavní poloosa
2. b – vedlejší poloosa
3. e – excentricita
4. p – parametr
5. ε – relativní excentricita

Z toho první čtyři jsou **délky**, poslední je **poměr**. Abychom zadali elipsu jednoznačně, stačí vybrat **dvě** z těchto čísel. Zbylé tři jsou na nich již závislé a můžeme je pomocí nich vypočítat.

Z pěti čísel vybrat dvě znamená $\binom{5}{2} = 10$ možností a ke každé z nich máme tři vzorce pro zbývající tři číslíčka. Máme tedy 30 vzorců.

Stačí si však pamatovat **tři základní vzorce**:

$$\boxed{a^2 = b^2 + e^2} \tag{1}$$

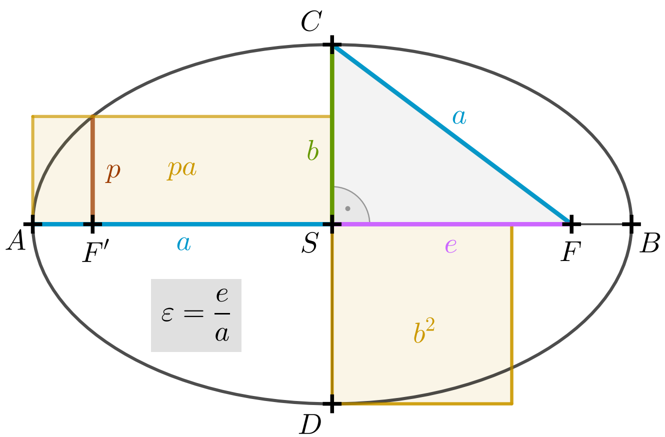
$$\boxed{b^2 = pa} \tag{2}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}} \tag{3}$$

Například pomocí prvního z nich (po odmocnění) vypočítáme ze zadaných hodnot b, e hodnotu a atd.

Tyto tři vzorce se dobře pamatují (viz obr. 1).

První vzorec je *Pýthagorova věta* v ΔCSF.



Obr. 1: Elipsa je charakterisována pěti čísly: a, b, e, p, ε.

https://www.geogebra.org/m/nev8bgcn

Druhý vzorec vyjadřuje rovnost plochy čtverce nad vedlejší poloosou a plochy obdélníka o stranách p a a.

Třetí vzorec udává, jaký díl z hlavní poloosy a zabírá excentricita e.

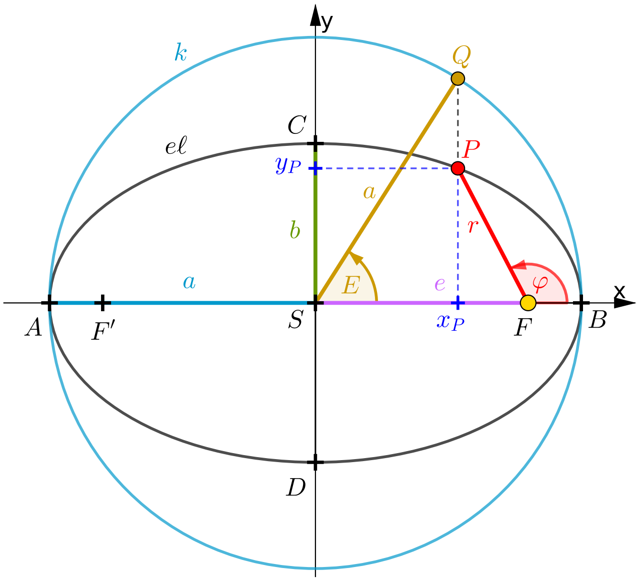
Zbylých 27 vzorců si už můžeš zkusit odvodit sama.

2 Souřadnice a rovnice

Poloha planety P na elipse je dána slavnou pěticí souřadnic (obr. 2):

$$\boxed{x_P, y_P, r, \varphi, E}$$

Nazývají se



Obr. 2: Polohu planety P je možno určit pomocí pěti souřadnic: x_P, y_P, r, φ, E.

https://www.geogebra.org/m/xh3asumc

1. x_P – x-ová souřadnice
2. y_P – y-ová souřadnice
3. r – průvodič (vzd. planety od Slunce)
4. φ – pravá anomálie (azimut)
5. E – excentrická anomálie

Z toho první dvě jsou souřadnice **kartézské**, druhé dvě **polární**, poslední je **polární** souřadnice bodu Q na kružnici k, ze kterého vznikne stlačením bod P na elipse $e\ell$.

K určení polohy bodu v rovině jsou obecně potřeba souřadnice dvě, ale protože planeta P je vázána na známou elipsu, stačí znát jen **jednu** z pěti zmíněných souřadnic a zbylé snadno vypočítáme pomocí **rovnic**, které popisují elipsu.

Je ovšem potřeba si uvědomit, že známe-li např. souřadnici x_P, může být planeta na elipse ve dvou bodech (na „horní“ nebo na „dolní“ polovině elipsy). Stejně tak dvojznačná je poloha planety zadané souřadnicí x_P nebo r.

Naproti tomu, je-li zadán úhel φ nebo E, je již poloha planety určena jednoznačně. Proto, až budeme chtít (v další kapitole) animovat nerovnoměrný pohyb planety po elipse, budeme potřebovat znát souvislost jedné z těchto dvou proměnných s časem.

Rovnic popisujících vztahy mezi vždy dvěma souřadnicemi z pětice x_P, y_P, r, φ, E je 10. (Vybírám dvojici z pěti souřadnic, tedy $\binom{5}{2} = 10$.) Jsou to tyto dvojice:

1.$[x_P; y_P]$	2.$[x_P; r]$	3.$[x_P; \varphi]$	4.$[x_P; E]$	5.$[y_P; r]$
6.$[y_P; \varphi]$	7.$[y_P; E]$	8.$[r; \varphi]$	9.$[r; E]$	10.$[\varphi; E]$

My jsme se zatím setkali se všemi kromě dvojic 2. a 5.:

SREL

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

POREL

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{5}$$

PREL 1. $(\varphi \to x; y)$

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi + e = \frac{p\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} + e \tag{6}$$

$$y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \tag{7}$$

PREL 2. $(E \to x; y)$

$$x = a\cos E \tag{8}$$

$$y = b\sin E \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{9}$$

PREL 3. $(E \to r; \varphi)$

$$r = a(1 - \varepsilon\cos E) \tag{10}$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos E} \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{11}$$

Ól rajt, vztah odpovídající dvojicím $[x_P; r]$ a $[y_P; r]$ si už snad můžeš od-vodit sama. Ale bude ti to k ničemu.

Δ

Da Sista Les

∞