Eine Diskussion der Faustregel von Laplace

PETER EICHELSBACHER, BIELEFELD

In diesem Aufsatz wollen wir die sogenannte *Laplace-Regel* bei der Anwendung des lokalen Grenzwertsatzes sowie des Integralgrenzwertsatzes von *de Moivre* und *Laplace* diskutieren.

In vielen Lehrbüchern für den Stochastik-Unterricht in der Oberstufe findet man die *Faustregel*, daß man im Fall $np(1-p) > 9$ bei der in diesen Grenzwertsätzen diskutierten Approximation "brauchbare Werte" erhält, wenn man die gesuchte Binomial-Wahrscheinlichkeit durch einen bestimmten Wert der Normalverteilung ersetzt. Hierbei ist n der Stichprobenumfang und p die Erfolgswahrscheinlichkeit eines jeden einzelnen Experimentes.

Wir betrachten zunächst die Formulierung der Grenzwertsätze von de Moivre und Laplace. Dann schildern wir einige bekannte Resultate zu diesen Grenzwertsätzen, die die Approximationsgenauigkeit studieren. Anschließend notieren wir ein Resultat von Berry und Esseen, welches den Fehler bei der Normalapproximation der Binomialwahrscheinlichkeiten abschätzt. Wir schliessen ab mit der Erkenntnis, daß die übliche Faustregel *mit Vorsicht* zu genießen ist und schlagen einen *besseren Weg* vor, Schülerinnen und Schüler der Oberstufe mit der Thematik der *Approximationsgenauigkeit* vertraut zu machen.

1 Die Bernoulli-Kette

Gegeben sei der Ereignisraum $\Omega = \{E, M\}$, wobei E für Erfolg und M für Mißerfolg steht. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg sei $0 < p < 1$. Dann setze $\Omega_n = \{E, M\}^n$, die Menge der E-M-Folgen der Länge n. Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \subset \Omega_n$ sei gegeben durch $p^k(1-p)^{n-k}$, wobei k die Anzahl der E's in der Folge $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bezeichnet. Das beschriebene Zufallsexperiment heißt Bernoulli-Kette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. X sei die Anzahl der Erfolge in einem Bernoulli-Experiment der Länge n. Setze $X_i = 1$, falls der i-te Versuch ein Erfolg ist, und $X_i = 0$ sonst, $1 \le i \le n$, so folgt $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Es gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: b(k; n, p)$$

für $k \in \{0, \ldots, n\}$. Die Zufallsgröße mit obiger Verteilung heißt binomialverteilt mit Parametern n und p. Es gilt $\mathbb{E}(X) = np =: \mu$, wobei $\mathbb{E}(X)$ den Erwartungswert von X bezeichnet, und $V(X) = np(1-p) =: \sigma^2$, wobei $V(X)$ die Varianz von X bezeichnet.

Es bezeichne für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(1/2)x^2)$$

die *Gaußsche Glockenfunktion*. Der lokale Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace löst das Problem, $b(k; n, p)$ für große n näherungsweise ohne viel Aufwand zu berechnen. In Barth und Haller [1] findet man die folgende Formulierung:

Satz 1.1 *Für große n und $0 < p < 1$ gilt:*

$$\begin{aligned} b(k; n, p) &\approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right). \end{aligned}$$

Faustregel: Für $\sigma^2 = np(1-p) > 9$ erhält man *brauchbare* Werte.

In der obigen Notation gilt also

$$b(k; n, p) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right).$$

Die Integralform ist dann

Satz 1.2 *Ist X binomialverteilt zu den Parametern n und p, so gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du. \end{aligned}$$

Faustregel: Die Approximation liefert für statistische Zwecke ausreichend genaue Werte, wenn $\sigma^2 = np(1-p) > 9$.

In einigen Lehrbüchern wird darauf hingewiesen, daß die Anwendbarkeit der beiden Grenzwertsätze natürlich davon abhängt, wie genau die Approximation bei vorgegebenen Werten für n und p ist. Nur zu verständlich sind dann die Kommentare, daß eine

Stochastik in der Schule 21 (2001) 1 S. 22–27

mathematische Ausführung zur Analyse der Approximationsgenauigkeit den Rahmen des Oberstufenstoffs bei weitem sprengt. Schon die Grenzwertsatz-Aussage wird in der Schule in der Regel nicht bewiesen, auch wenn man zum Beipiel im Buch von Barth und Haller [1] eine (lohnende) heuristische Argumentation für einen Beweis von Satz 1.1 findet. Daher vertröstet man sich damit, die Faustregeln einfach hinnehmen zu müssen. Für den Lehrstoff ist dies so auf den ersten Blick ohne Alternative.

Trotzdem ist für die Lehrer die Frage natürlich berechtigt, woher die Faustregel kommt, aus welchen Approximations-Analysen in der Literatur sie sich einfach ableiten läßt. Da die Regel vereinzelt *Laplace-Regel* genannt wird, vermutet man Hinweise in den Arbeiten von Laplace. Tatsächlich hat Laplace eine genauere Entwicklung der Binomialwahrscheinlichkeiten studiert, doch kann man keine Stelle finden, bei der die Regel $np(1-p) > 9$ explizit erwähnt wird.

2 Genauere Entwicklungen

Wir wollen nun historisch darstellen, wie sich die Resultate von de Moivre und Laplace präzisieren lassen und starten dabei bei den Arbeiten von de Moivre und Laplace selbst. Die folgenden Ergebnisse entnehmen wir den Büchern von Barth und Haller [1], Hald [7] sowie Rényi [10]. Jakob Bernoulli konnte in seiner 1713 gedruckten *Ars Conjectandi* als erster exakt beweisen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A sich um weniger als ein festes ε von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ unterscheidet, gegen 1 konvergiert. Er bestimmte den Wert der Wahrscheinlichkeit $P(|h_n(A)-P(A)|<\varepsilon)$ jedoch nicht. De Moivre betrachtete den Fall $P(A) = 1/2$ und erhielt, daß

$$P\left(\left|h_n - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0.682688$$

ist, falls n unendlich groß wird, und daß man diesen Wert als gute Näherung bei hinreichend großen n nehmen darf. Im Fall $p = 1/2$ ist der Zahlenwert $2\sqrt{n}$ gerade die Standardabweichung σ. De Moivre veröffentlichte 1733 dieses Resultat in einer 7seitigen Druckschrift mit dem Titel *Approximatio ad summam terminorum Binomii*, die er nur an wenige Freunde verteilte. Diese Schrift erschien wenig später (1738) in der 2. Auflage der berühmten Arbeit *The Doctrine of Chances*. Für den Fall $p = 1/2$ bewies de Moivre in aller Strenge die Approximation

$$\begin{aligned} &b(np+d;n,p)\\ &\qquad\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left(-d^2/(2np(1-p))\right). \end{aligned}$$

Im Fall $p \neq 1/2$ behauptete er, der Beweis ginge analog. Doch führte er ihn nicht. Er erhielt (im Fall $p = 1/2$) weiterhin die folgende Approximation für die Bereichswahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:

$$\sum_{|x-np|\le d} b(x;n,p) \approx \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{d/2\sqrt{np(1-p)}} e^{-2y^2}\,dy.$$

De Moivre benutzte für seinen Beweis eine eigene Version der heute nach *Stirling* benannten Approximation von $n!$ in Verbindung mit der Formel von Euler und Maclaurin, auf die wir hier nicht weiter eingehen. Erst Laplace führte einen Beweis von de Moivres Behauptung für den allgemeinen Fall $p \neq 1/2$. Man findet einen Beweis in seinem berühmten Buch *Théorie Analytique des Probabilités* aus dem Jahre 1812. Auch Laplace verwendete die Stirling Formel und die Formel von Euler und Maclaurin und erhielt das wichtige Resultat: Wenn $m = [(n+1)p] = np+z$ mit $-(1-p) \le z \le p$, so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{x=m-d}^{m+d} b(x;n,p) &= \frac{2}{\sqrt{n}}\int_0^t e^{-y^2}\,dy\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi np'(1-p')}}e^{-t^2} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei $t := \frac{d}{\sqrt{2np'(1-p')}}$ und $p' = m/n$. m ist der Wert, an dem die Funktion $k \mapsto b(k;n,p)$ ihr Maximum annimmt. Hier taucht zum ersten Mal eine Art Entwicklung der Binomialwahrscheinlichkeit auf. Neben dem ersten Summanden, der bei de Moivre im Fall $p = 1/2$ bereits auftritt, kommt ein (erster) Fehlerterm der Größenordnung $n^{-1/2}$ vor. Genauer scheint ein Fehlerterm vorzukommen, der sich in der Größenordnung $(np(1-p))^{-1/2}$ verhält (denn $m = np+z$, siehe oben). Dies wirkt wie der entscheidende Hinweis für die Laplace-Regel, denn eine erste grobe Beobachtung ist die folgende: ist $np(1-p) > 9$, so ist $(np(1-p))^{-1/2} < 1/3$. Besagt die Laplace-Regel also, daß man sich auf einen Fehler, der maximal $1/(3\sqrt{2\pi})$ ist, einzulassen bereit ist?

Leider geht es so schnell nicht. Unsere erste *grobe* Beobachtung enthält zwei schwerwiegende *Fehler*.

Das Resultat von Laplace haben wir ungenau angegeben: Es treten weitere Summanden auf, und erst alle Summanden zusammen stellen die Differenz

$$\sum_{x=m-d}^{m+d} b(x;n,p) - \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^t e^{-y^2}\, dy$$

dar, also liefert jeder einen Beitrag bei der Bestimmung des Fehlers bzw. der Differenz. Dies ist der erste Fehler. Laplace erkannte (jedoch), daß die Größenordnung aller weiteren Summanden durch die des zweiten Summanden, also durch $n^{-1/2}$, begrenzt ist. Wir haben nicht geklärt, was mit dem technischen Begriff *Fehlerterm in der Größenordnung* $n^{-1/2}$ genau gemeint ist. Nach Definition heißt dies, daß der Ausdruck nach oben durch $Cn^{-1/2}$ abgeschätzt werden kann, wobei C eine von n unabhängige Konstante ist. Man schreibt dafür

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np'(1-p')}} e^{-t^2} = O(n^{-1/2}).$$

Nun erkennt man direkt, daß diese Konstante für unsere Fragestellung von entscheidender Bedeutung ist: Wir haben aber keine genaue Information über C und daher keine genaue Information über den tatsächlichen Approximationsfehler. Dies ist der zweite Fehler. Zur Präzisierung: Der erste (dominierende) Fehlerterm ist durch $1/(\sqrt{2\pi np'(1-p')})$ nach oben beschränkt. Nun gilt nach ein paar Rechnungen

$$\begin{aligned} \sqrt{np'(1-p')} &= \sqrt{m(1-m/n)} \\ &= \sqrt{np(1-p)}\left(1 + \frac{z((1-p)-p)}{2np(1-p)} + O\left(\frac{z^2}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Es tritt also ein Ordnungsterm auf, der C mitbestimmt. Wäre etwa $C > 30$ (willkürliche Wahl!), wäre eine Abschätzung $30/(\sqrt{2\pi np(1-p)})$ bei einfacher Anwendung der Faustregel $np(1-p) > 9$ ohne Wert.

Die Resultate von de Moivre und Laplace haben natürlich asymptotisch einen großen Nutzen. Der Fehlerterm geht für $n \to \infty$ gegen null, man erhält also aus obigen Formeln Beweise für Satz 1.1 und Satz 1.2 und darüber hinaus die Information, daß der Fehlerterm wie $n^{-1/2}$ gegen null geht. Heute weiß man, daß diese Größenordnung im Fall des Satzes von de Moivre und Laplace nicht verbessert werden kann.

Betrachten wir die weitere Entwicklung: Man konnte den Satz von de Moivre und Laplace präzisieren. So findet man zum Beipiel im Lehrbuch von Rényi [10] die folgende Formulierung: Ist $0 < p < 1$ und

$$|x| = \left|\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \le A,$$

so gilt

$$b(k;n,p) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \left(1 + \frac{(x^3-3x)((1-p)-p)}{6\sqrt{np(1-p)}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

wobei die Konstante im Restglied $O(\frac{1}{n})$ nur von A abhängt. Wir haben die obige Notation O verwendet. Die Addition eines Terms $O(\frac{1}{n})$ bedeutet, daß man einen Summanden hinzunimmt, der sich wie $1/n$, multipliziert mit einer Konstanten, verhält. Man erkennt hier eine sehr explizite Darstellung des Fehlerterms, doch auch hier tritt noch ein Term der Größenordnung n^{-1} auf, so daß analog zur obigen Diskussion eine präzise Kalkulation des Approximations-Fehlers auch mit diesem Resultat nicht erzielt werden kann. Das Resultat läßt ebenfalls eine Begründung der Faustregel nicht zu. Wir verweisen zum Abschluß dieses Kapitels noch auf eine Arbeit von S.N. Bernstein, in der die obige Approximation noch verbessert werden konnte. Da es sich aber erneut um ein Resultat handelt, bei dem noch ein Größenordnungsterm übrig bleibt, wollen wir es nicht mehr aufführen. Eine ausführliche Diskussion findet man bei Rényi [10].

3 Der Satz von Berry und Esseen

In diesem Jahrhundert wurde in zwei grundlegenden Arbeiten von Berry [3] und Esseen [5] die Größe der Abweichungen der Verteilung von $(X - np)/(\sqrt{np(1-p)})$ von der Normalverteilung studiert. Da es in den modernen Schulbüchern zur Stochastik häufig üblich ist, einen zentralen Grenzwertsatz für unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen in Analogie und in Verallgemeinerung zum Satz von de Moivre und Laplace zu formulieren, wollen wir an dieser Stelle über den Satz von Berry und Esseen informieren. Eine genaue Formulierung geht so:

Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von identisch verteilten Zufallsgrößen mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz. Endlich viele der X_i seien stets stochastisch unabhängig. S_n^* sei die standardisierte Zufallsgröße zu $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, also

$$S_n^* := \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n V(X_i)}}.$$

Es bezeichne $s_n := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$. Dann gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \le x) - \Phi(x)| \le 6 s_n^{-3} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(|X_j - \mathbb{E}(X_j)|^3).$$

Dabei ist $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy$. Der Beweis dieses Satzes macht selbst in einer Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie viel Mühe und gehört nicht zum Standardstoff. Wir können hier zunächst bemerken, daß die sogenannte Berry-Esseen Konstante 6 im Laufe der letzten Jahrzehnte verbessert werden konnte, also durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Kolmogorov [8] stellte in einer Arbeit aus dem Jahr 1953 die *Vermutung* auf, daß der optimale Wert für die Konstante $c_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist, also

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} &|P(S_n^* \le x) - \Phi(x)| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s_n^{-3} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(|X_j - \mathbb{E}(X_j)|^3)\end{aligned}$$

gilt. Esseen konnte in [6] 1956 zeigen, daß

$$c_e \ge \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.0108$$

gilt. In einer Arbeit von van Beek [2] wurde gezeigt, daß 6 durch 0.8 (genau durch 0.7995) ersetzt werden kann. Für unsere weitere Diskussion wird es von Bedeutung sein, die genaueste Konstante zu kennen. Tatsächlich konnte Chistyakov 1997 die Kolmogorov-Vermutung beweisen, die optimale Konstante im Satz von Berry und Esseen ist also $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Chistyakovs Arbeit [4] entstand während eines Gastaufenthaltes an der Universität Bielefeld.

Mit den Hilfsmitteln eines Kurses zur Stochastik sind wir in der Lage, die Berry-Esseen Schranke für den Fall der Binomialverteilung zu bestimmen. Hier ist X_i die Bernoulli-verteilte Zufallsgröße zum Parameter p, also $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$ für ein $0 < p < 1$. Wir verwenden die folgende einfache und wichtige Identität für den Erwartungswert: Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so ist

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) P(X = x),$$

wobei wir voraussetzen, daß die Reihe absolut konvergiert, und annehmen, daß X eine endliche oder abzählbar unendliche Wertemenge $X(\Omega)$ hat. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}(X_i)|^3) &= |1-p|^3 p + (1-p)|p|^3 \\ &= (1-p)^3 p + (1-p)p^3.\end{aligned}$$

Weiter ist $s_n = \left(np(1-p)\right)^{1/2}$, also $s_n^3 = n\sqrt{n}\left(p(1-p)\right)^{3/2}$. Wir erhalten also in diesem Spezialfall für die Berry-Esseen Schranke den Wert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{(1-p)^3 p + (1-p)p^3}{\left(p(1-p)\right)^{3/2}}.$$

Eine einfache Nebenrechnung liefert somit den folgenden wichtigen Satz:

Satz 3.1 *Ist X binomalverteilt zu den Parametern n und p und bezeichnet*

$$S_n^* = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

so gilt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \le x) - \Phi(x)| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{(1-p)^2 + p^2}{\sqrt{p(1-p)}} \right) \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}}.\end{aligned}$$

Wir haben also eine *zumutbare* Formel für den Fehler der Approximation der Binomialverteilung mittels der Normalverteilung angegeben, die sich aus den Resultaten von Berry und Esseen ableiten läßt.

Beweis: (der zweiten Abschätzung in Satz 3.1) Es sei $f(p) = (1-p)^2 + p^2 = 1 - 2p + 2p^2$, so liegt für diese Funktion bei $p_0 = 1/2$ ein lokales Minimum vor und es ist $f(p_0) = 1/2$. Weiter ist $f(0) = f(1) = 1$, also gilt im Intervall $[0, 1]$ die Abschätzung $f(p) \le 1$, womit die zweite Ungleichung in Satz 3.1 bewiesen ist.

Es sei bemerkt, daß mit der Rechnung im Beweis folgt, daß im Fall des fairen Münzwurfes ($p_0 = 1/2$) die Fehlerschranke in Satz 3.1 den kleinsten (den genausten) Wert annimmt. Hier liefert die erste Ungleichung die Abschätzung $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

Desweiteren soll diskutiert werden, welche Aussage Satz 3.1 liefert, wenn die Parameter n und p so vorliegen, daß die Laplace-Regel $np(1-p) > 9$ erfüllt ist.

Satz 3.2 *Nehmen wir an, daß die Parameter n und p die Ungleichung $np(1-p) > 9$ erfüllen, so ist in der*

Notation von Satz 3.1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \le x) - \Phi(x)| \le \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}((1-p)^2+p^2) \le \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0.133.$$

Im ungünstigsten Fall liegt nach Information der Resultate von Berry und Esseen also ein Fehler 0.133 vor, wenn die Parameter der Binomialverteilung die Laplace-Bedingung erfüllen.

4 Eine Alternative zur Faustregel

Das Fazit der obigen Beobachtungen ist, eine Alternative zur Faustregel von Laplace anzugeben. Man berichte in den Oberstufenkursen von der Entwicklung der Resultate von Berry und Esseen und leite als sinnvolle Übung zur Bestimmung von Erwartungswerten die konkrete Fehlerschranke aus Satz 3.1 her. Anstelle der Faustregel von Laplace verwende man nun die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{(1-p)^2+p^2}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

Sie bestimmt die beste in der aktuellen Literatur bekannte Abschätzung der Differenz zwischen

$$P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right)$$

und $\Phi(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Auch wenn die Berechnung bei vorgegebenem n und p ein klein wenig Mühe macht, hat sie doch gegenüber der Anwendung der Laplace-Regel einen sehr großen Vorteil: Man ermittelt den Fehler möglichst genau und kann selbst, in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabenstellung, entscheiden, ob der Fehler in Kauf genommen werden kann oder nicht. Die Laplace-Regel gibt einem nur eine völlig nebulöse Andeutung, daß man sich auf der sicheren Seite einer *guten* Approximation fühlen darf, ohne daß diese Regel andeutet, in welchem Fehlertoleranz-Bereich man sich bewegt. Die deutliche Kritik an der Laplace-Regel ist nicht nur ihre *vage* Aussage. Sie ist mathematisch überhaupt nicht begründet, außer daß man sich scheinbar auf Daten-Erfahrungen bezieht. Natürlich ist die vorgeschlagene Vorgehensweise der konkreten Abschätzung des Fehlers mathematisch nicht fundierter, weil sie im Rahmen des Schulunterrichts nicht herleitbar ist. Aber dies kann im Vergleich zur Laplace-Regel keine Begründung gegen die Verwendung der präziseren Rechnungen sein.

Es soll im weiteren Satz 3.1 anhand von Beispielen diskutiert werden.

Beispiel 1: Eine Fabrik stellt ein Werkstück her mit einer Ausschußrate von 10%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 400 produzierten mehr als 50 defekt? Es ist $n = 400$, $p = 0.1$, $np = 40$, $\sqrt{np(1-p)} = 6$. Also ist unter anderem die klassische Laplace-Regel erfüllt. Es gilt

$$P(S_n > 50) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{5}{3}\right) \cong 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \cong 0.05.$$

Wie groß ist der Approximationsfehler? Da

$$|P(S_n > 50) - (1-\Phi(5/3))| = |P(S_n \le 50) - \Phi(5/3)| = |P(S_n^* \le 5/3) - \Phi(5/3)|,$$

ist der Fehler durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi 400}}\left(\frac{0.9^2+0.1^2}{\sqrt{0.1\cdot 0.9}}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \approx 0.066$$

begrenzt. Man kann sich nun fragen, ob diese Genauigkeit der Approximation in der gestellten Aufgabe ausreichend ist. Satz 3.1 gibt uns genaue Information.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwischen 35 und 45 defekt?

$$P(35 \le S_n \le 45) = P\left(-\frac{5}{6} \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{5}{6}\right) \cong \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) \cong 0.6.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß hier der Approximationsfehler höchstens doppelt so groß ist, also ≈ 0.133: wir verwenden dazu

$$|P(-a \le S_n^* \le b) - (\Phi(b) - \Phi(-a))| \le |P(S_n^* \le b) - \Phi(b)| + |P(S_n^* \le -a) - \Phi(-a)|.$$

In vielen Schulbüchern wird ausgiebig diskutiert, daß die Genauigkeit etwas besser ist, wenn man die Mitte der möglichen Grenzpunkte nimmt; das heißt, im obigen Beispiel schreibt man besser:

$$P(S_n > 50) = P(S_n \ge 50{,}5) \cong 1 - \Phi\left(\frac{21}{12}\right)$$

$$P(35 \le S_n \le 45) = P(34{,}5 \le S_n \le 45{,}5) \cong 1 - 2\Phi\left(\frac{11}{12}\right).$$

Für $n \to \infty$ ist die Korrektur natürlich belanglos. Die Approximations-Ungenauigkeit ist durch den obigen Wert beschrieben.

Beispiel 2: Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 60 Würfen mit einem Laplace-Würfel 9-, 10- oder 11 mal die Sechs fällt (siehe Beispiel in Barth und Haller [1]). Der exakte Wert wird durch

$$\sum_{i=9}^{11} b(60; i, 1/6) = 0.396$$

gegeben. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit mittels $\Phi(\cdot)$ approximieren. Hier liegt übrigens $np(1-p)$ knapp unter 9, so daß man versucht ist, durch Anwendung der Laplace-Regel diese Approximation für nicht gut zu erklären. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P(9 \leq S_n \leq 11) &= P(8 < S_n \leq 11) \\ &\approx \Phi\left(\frac{11-10+0.5}{5/3\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{8-10+0.5}{5/3\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\Phi(3/10\sqrt{3}) - 1 \approx 0.397. \end{aligned}$$

Da wir hier den wahren Wert kennen, sehen wir, daß der Fehler der Approximation bei weniger als 0.2 % liegt. Die Laplace-Regel kann also recht gute Approximationen nicht notwendig *erkennen*. Wir bestimmen den Berry-Esseen Fehler nach Satz 3.1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi 60}}\left(\frac{(1/6)^2 + (5/6)^2}{\sqrt{(1/6)\cdot(5/6)}}\right) \approx 0.052.$$

Dieses Resultat besagt, daß natürlich auch unser Satz 3.1 (und Satz 3.2) immer mit Vorsicht zu genießen ist. Bei strikter Einhaltung der Laplace-Regel hätte man von einer Normalapproximation abgesehen. Bei Bestimmung einer Schranke für den Approximationsfehler ist man von der Güte der Normalapproximation vermutlich auch nicht begeistert. Der Approximationswert ist aber tatsächlich sehr dicht am wahren Wert.

Beispiel 3: (siehe Krengel [9]) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 0.2 annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 0.025 sein soll? Hier ist S_n die Zahl der wahrgenommenen Reservierungen. S_n ist $b(\cdot; n, p)$-verteilt mit $p = 0.8$. Es soll nun

$$\begin{aligned} 0.025 &\approx P(S_n > 200) \\ &= P(S_n^* > (200 - 0.8n)/(\sqrt{0.8 \cdot 0.2n})) \end{aligned}$$

sein. Die Normalapproximation mit Korrekturterm 0.5 und $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ liefert $200.5 - 0.8n \approx 1.96 \cdot \sqrt{0.8 \cdot 0.2n}$. Man stellt nun fest, daß man bei $n = 235$ eine Überbuchungswahrscheinlichkeit von 0.0208 und mit $n = 236$ schon einen Wert 0.0285 erreicht. Der Manager darf 235 Buchungen akzeptieren. Bei $n = 235$ und $p = 0.8$ liefert Satz 3.1 die folgende Abschätzung für den Approximationsfehler:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi 235}}\left(\frac{(0.8)^2 + (0.2)^2}{\sqrt{(0.8)\cdot(0.2)}}\right) \approx 0.026.$$

Der Fehler ist also recht klein in diesem Beispiel.

Literatur

[1] Barth, F. und Haller R.: Stochastik, Leistungskurs, Ehrenwirth Verlag, München, (1991).

[2] van Beek, P.: An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esséen inequality, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 23, 187–196, (1972).

[3] Berry, A.C.: The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent random variables. Trans. Amer. Math. Soc. 49, 122-136, (1941).

[4] Chistyakov, G.P.: A new asymptotic expansion and asymptotically best constants in Lyapunov's theorem, preprint, SFB 343-Diskrete Strukturen in der Mathematik, Universität Bielefeld, (1997).

[5] Esseen, C.G.: Fourier analysis of distribution functions, Acta Math. 77, 1-125, (1945).

[6] Esseen, C.G.: A moment inequality with an application to the central theorem, Scand. Aktuar. 39, 160-170, (1956).

[7] Hald, A.: A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750, Wiley Series in Probability, New York, (1990).

[8] Kolmogorov, A.N.: On recent results in limit theorems of probability theory, Vest. MGU 10, 29-38, (1953).

[9] Krengel U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg Studium, Braunschweig, (1991).

[10] Rényi, A.: Foundations of Probability, Holden-Day, San Francisco, (1969).

Anschrift des Verfassers
Peter Eichelsbacher
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 100131
33501 Bielefeld
peter@mathematik.uni-bielefeld.de