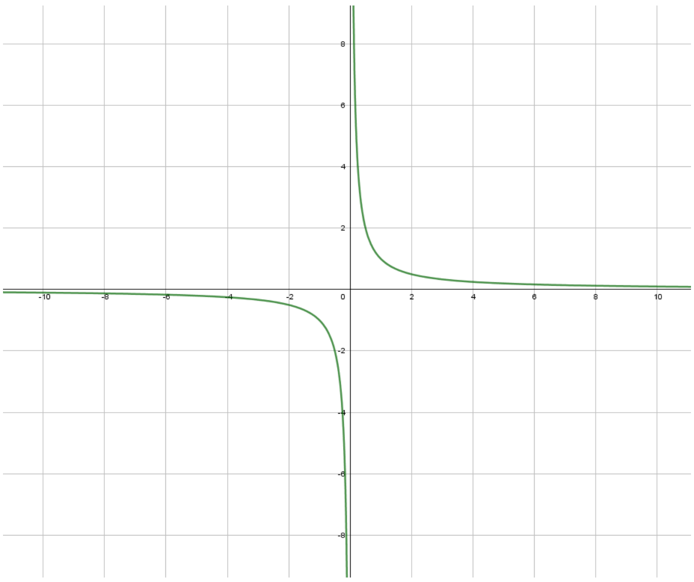
A2 : Fonction inverse

Connaissances travaillées	**Non acquise**	**En cours d'acquisition**	**Acquise**
Limite des fonctions.			
Dérivée de la fonction inverse.			
Mise au même dénominateur d'une combinaison linéaire de la fonction inverse et d'un polynôme.			
Etude de signe d'un quotient.			

I/ Caractéristiques :

1) Courbe et tableau de variation.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour courbe représentative la courbe ci-dessous :



On remarque que la courbe admet une symétrie dont le centre est l'origine du repère. Cette courbe possède d'autres caractéristiques remarquables :

- Plus la valeur de x est petite plus la courbe se rapproche de 0 mais sans jamais toucher l'axe. De même plus la valeur de x est grande plus la courbe se rapproche de 0 mais sans jamais toucher l'axe. C'est ce que l'on appelle des asymptotes.
- Lorsque l'on part d'une valeur négative et que l'on se rapproche de 0 la courbe semble descendre à l'infini. Et lorsque l'on part d'une valeur positive et que l'on se rapproche de 0 la courbe semble monter à l'infini. Il est donc impossible de savoir quelle serait la valeur de la fonction en 0. On dit donc qu'elle n'est pas définie en 0 et qu'elle admet une asymptote verticale.

Ces informations permettent de dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Les doubles barres signifient que la fonction n'est pas définie, qu'elle ne prend pas de valeurs quand $x = 0$. Ce qui est logique puisque vous avez appris depuis longtemps que l'on ne peut pas diviser par 0.

2) Notion d'asymptote et de limites.

Comme nous l'avons vu la fonction admet des asymptotes quand x tend vers + ou - ∞. On notera que :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Qui se lit : la limite de la fonction lorsque x tend vers -∞ est 0. Cela signifie que plus x prend des valeurs proches de plus la valeur obtenue est proche de 0 mais sans jamais être 0.

De même on peut noter que :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Que l'on peut comprendre comme, lorsque l'on prend comme antécédents des nombres négatifs (pour 0^-) ou positif (pour 0^+), les valeurs de la fonction sont des nombres respectivement de plus en plus petits ou de plus en plus grands.

Méthode : Calculer la limite d'une fonction.
Pour calculer la limite d'une fonction il suffit de remplacer chaque élément de la fonction par la valeur de sa limite.

Exemple :
Calculons la limite en + ∞ des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{7}{x} - 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} - \lim_{x \to +\infty} 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 2 = -2$$

On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Or multiplier 0 par 7 donne toujours 0, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} = 0$$

On sait aussi que 2 ne dépend pas de *x* donc la valeur de 2 ne sera pas modifiée par la valeur de *x* donc :

$$\lim_{x \to +\infty} 2 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$

On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si *x* deviens infiniment grand alors *2x* est infiniment grand aussi donc :

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

II/ Dérivée et calculs avec la fonction inverse.

1) Dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Cette fonction est un quotient et nous avons vu en classe de première la technique de dérivation d'un quotient.

On pose :
$u = 1$ et $v = x$
$u' = 0$ et $v' = 1$

On en déduit que :

$$f'(x) = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

Nous retiendrons donc et sans besoin de le démontrer que :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Nous pouvons a partir de cette dérivée construire le tableau de variation de la fonction en étudiant le signe de *f '*. Notre dérivée est un quotient, donc on étudie séparément le signe du numérateur et du dénominateur :

$-1 < 0$ et $x^2 \geq 0$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
-1		$-$		$-$	
x^2		$+$	0	$+$	
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

2) Etude de fonction comprenant la fonction inverse :

Vous serez amené à étudier des fonctions comprenant la fonction inverse, bien qu'il soit compliqué de déterminer une marche à suivre universelle, on peut quand même garder en tête quelques étapes comme dans l'exemple suivant :

Soit la fonction f définie sur]0 ; 15] par :

$$f(x) = 9x - 120 + \frac{900}{x}$$

Si on souhaite dresser le tableau de variation de cette fonction il faudra suivre les étapes habituelles :
- Calcul de *f '* :

On sait que ; *(x)' = 1* ; *(120)' = 0* ; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ donc :

$$f'(x) = 9 \times 1 + 0 + 900 \times \frac{-1}{x^2} = 9 - \frac{900}{x^2}$$

L'étape suivante est d'étudier le signe de la dérivée, or si il est simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, il est compliqué d'étudier celui d'une somme. Nous allons donc travailler l'écriture de *f '* pour la transformer en une seule fraction

$$f'(x) = \frac{9 \times x^2}{x^2} - \frac{900}{x^2} = \frac{9x^2 - 900}{x^2} = \frac{(3x-30)(3x+30)}{x^2}$$

Pour la dernière étape la forme factorisée vous sera souvent donnée ou vous serez guidés pour la trouver.
On peut maintenant étudier le signe de cette fonction.

- Signe de *f '* et tableau de variation :

$3x - 30 > 0$	$3x + 30 > 0$	$x^2 > 0$
$3x > 30$	$3x > -30$	$x > 0$
$x > \frac{30}{3}$	$x > \frac{-30}{3}$	
$x > 10$	$x > -10$	

On peut donc en déduire le tableau de signe suivant :

x	0		10		15
$(3x-30)$		$-$	0	$+$	
$(3x+30)$		$+$		$+$	
x^2		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	60	↗	75