Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 8 - ángulos con el mismo seno, mismo coseno o misma tangente en diferentes cuadrantes

1. Sabiendo que $sen(x)=\frac{1}{2}$ **, calcula el valor de** $sen(3x)$ **y de** $sen(4x)$ **.**

$$sen(x)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x=30º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=150º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z}$$

$$sen(3x) \quad \rightarrow \quad x=90º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=450º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad sen(3x)=1$$

$$sen(4x) \quad \rightarrow \quad x=120º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=600º+360º\cdot k\,,k\in\mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad sen(4x)=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

2. Calcula:

a) $\cos(arcsen(\frac{1}{5}))$ **b)** $\tan(\arccos(\frac{3}{4}))$ **c)** $sen(2\, arcsen(\frac{1}{3}))$

a) Primero resolvemos el argumento del coseno.

$$arcsen(\frac{1}{5})=11{,}53^{o}+360º\cdot k\,,\,168{,}47^{o}+360º\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

Aplicamos coseno a los dos ángulos (del primer y segundo cuadrante).

$$\cos(arcsen(\frac{1}{5}))=\pm 0{,}97$$

b) Primero resolvemos el argumento de la tangente.

$$\arccos(\frac{3}{4})=41{,}40^{o}+360º\cdot k\,,\,318{,}60^{o}+360º\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

Calculamos la tangente de los dos ángulos (del primer y cuarto cuadrante).

$$tg(\arccos(\frac{3}{4}))=\pm 0.88$$

c) Resolvemos el argumento del seno.

$$arcsen(\frac{1}{3})=19{,}47^{o}+360º\cdot k\,,\,160{,}53^{o}+360º\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

$$2\cdot arcsen(\frac{1}{3})=38{,}94^{o}+360º\cdot k\,,\,321{,}06^{o}+360º\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

Calculamos la función seno a los dos ángulos (primer y cuarto cuadrante).

$$sen(2\cdot arcsen(\frac{1}{3}))=\pm 0{,}62$$

3. Sabiendo que $cosec(\alpha)=\frac{-7}{4}$ y que α es un ángulo del cuarto cuadrante, deduce los siguientes apartados sin utilizar la calculadora. Si es necesario deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales):

a) $sec(\alpha)$

b) $tg(2\alpha)$ **(Ayuda: el valor de** $tg(2\alpha)$ **se calcula con la expresión** $tg(2\alpha)=\frac{2\,tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$ **)**

a) $cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)} \rightarrow sen(\alpha)=\frac{-4}{7}$

De la relación fundamental → $1=\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)$

$$1=\cos^2(\alpha)+\frac{16}{49} \rightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-\frac{16}{49}} \rightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{33}{49}} \rightarrow \cos(\alpha)=\frac{\pm\sqrt{33}}{7}$$

El enunciado afirma que α es del cuarto cuadrante, por lo que nos quedamos con el valor positivo del coseno → $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{33}}{7}$

$$sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)} \rightarrow sec(\alpha)=\frac{7}{\sqrt{33}} \rightarrow sec(\alpha)=\frac{7\cdot\sqrt{33}}{33}$$

b) Para obtener $tg(2\alpha)$ primero vamos a obtener $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$$tg(\alpha)=\frac{-4}{\sqrt{33}} \rightarrow tg(\alpha)=\frac{-4\cdot\sqrt{33}}{33}$$

$$tg(2\alpha)=\frac{2\,tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)} \rightarrow tg(2\alpha)=\frac{\frac{-8\cdot\sqrt{33}}{33}}{1-\frac{16}{33}}=\frac{-8\cdot\sqrt{33}}{17}$$

4. Sabiendo que $\cos(\alpha)=\frac{-1}{3}$ **y** $sen(\alpha)=\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}$ **obtener:**

a) α

b) $\cos(2\alpha)$ **(No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria). Ayuda: el coseno del ángulo doble se calcula con la expresión** $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

c) $tg(2\alpha)$ **(No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria). Ayuda: el valor de** $tg(2\alpha)$ **se calcula con la expresión** $tg(2\alpha)=\frac{2\,tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$

a) Coseno negativo y seno negativo genera un ángulo del tercer cuadrante.

Usando la calculadora → $\alpha=109{,}47^o$ pertenece al segundo cuadrante.

$$180º-109{,}47^o=70{,}53^o$$

Por lo tanto, en el tercer cuadrante → $180º+70{,}53^o=250{,}53^o$ del tercer cuadrante.

b) $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=(\frac{-1}{3})^2-(\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3})^2=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=\frac{-7}{9}$

c) $tg(2\alpha)=\frac{2\cdot tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$, $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}}{\frac{-1}{3}}=2\cdot\sqrt{2}$

$$tg(2\alpha)=\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{1-(2\cdot\sqrt{2})^2}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{1-8}=\frac{-4\cdot\sqrt{2}}{7}$$

5. Sabiendo que $sen(\alpha)=\frac{5}{13}$ **y que** α **es un ángulo del segundo cuadrante, deduce:**

a) $\cos(\alpha)$ **b)** $cotg(\alpha)$ **c)** $cosec(\alpha)$

a) $sen(\alpha)=\frac{5}{13}$ → de la relación fundamental → $\cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\pm\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\pm 12}{13}$

Tomamos la solución negativa $\cos(\alpha)=\frac{-12}{13}$ por ser del segundo cuadrante.

b) $cotg(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}=\frac{\frac{-12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{-12}{5}$

c) $cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=\frac{13}{5}$