

La Ventana

1. OBJETIVO:

Que el estudiante identifique la relación funcional entre dos variables, el tipo de esta relación, la determinación de su dominio, su imagen, bosqueje la gráfica de su rapidez instantánea de cambio e identifique la relación entre la gráfica inicial y la gráfica de su rapidez de cambio.

La práctica incide sobre el desarrollo de las siguientes:

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS ¹	COMPETENCIAS GENÉRICAS ²	HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES ³
<p>1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.</p> <p>3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>Se expresa y se comunica</p> <p>4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. <p>Piensa crítica y reflexivamente</p> <p>5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. <p>6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética. <p>Aprende de forma autónoma</p> <p>7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana. <p>Trabaja en forma colaborativa</p> <p>8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo. 	<p>Colaboración y trabajo en equipo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trabaja en equipo de manera constructiva y ejerce un liderazgo participativo y responsable, • Propone alternativas para actuar y solucionar problemas. • Asume una actitud constructiva.

Transversalidad con los cursos de	Ecología
-----------------------------------	----------

¹ <http://www.sep.gob.mx/work/sites/sep1/resources/LocalContent/111950/9/a486.htm>

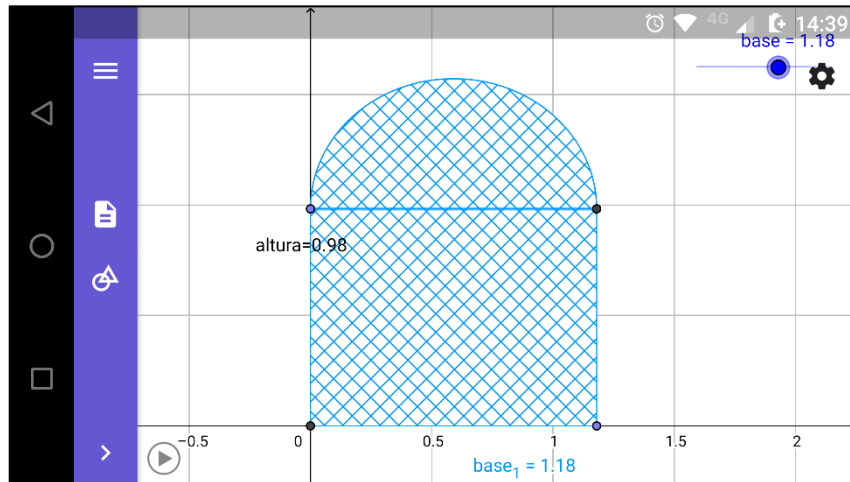
² http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Diptico_Competicencias_altares.pdf

³ https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/264246/Las_HSE_en_nuevo_modelo_educativo.pdf

PLANTEAMIENTO

Se desea instalar una ventana normanda (tiene una sección rectangular y una sección semicircular en la parte superior) de 5m de perímetro. Calcular las medidas para que el área de la ventana sea máxima a fin de que entre la mayor cantidad de iluminación por ella.

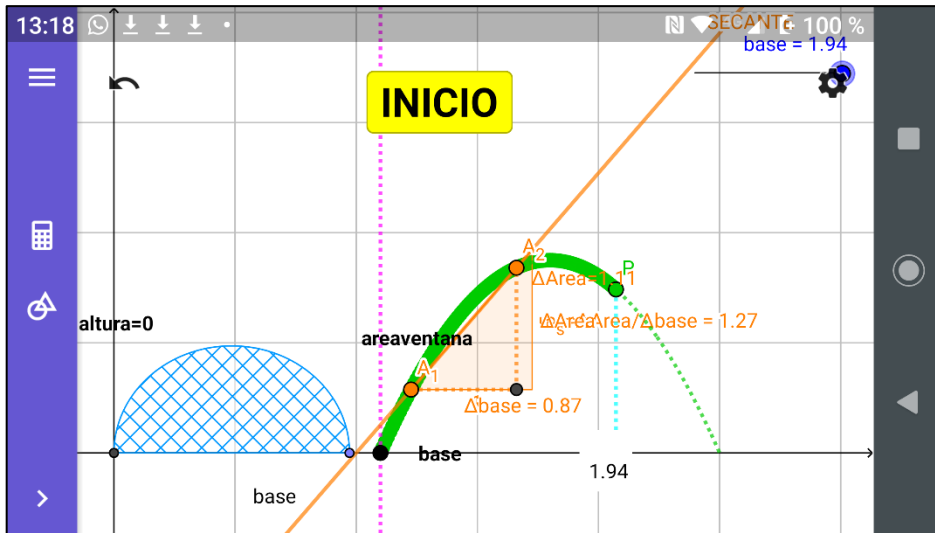
Para ayudarte a visualizar la situación, abre en tu dispositivo el archivo GeoGebra **laventana1.ggb**, y pulsa el botón INICIAR:



Trabajando colaborativamente con tu equipo, contesta cada una de las preguntas siguientes:

- ¿Qué es lo que cambia al deslizar el punto **base**? _____
- ¿Consideras que con este cambio que identificas cambia el área de la ventana? ¿Sí?, ¿No? Discútelo con tus compañeros de equipo _____
- ¿Qué fórmula se requiere para calcular el área de la ventana?
 - $A = \frac{base \cdot altura}{2}$
 - $A = base \cdot altura + \frac{\pi \cdot base^2}{2}$
 - $A = base \cdot altura + \frac{\pi \left(\frac{base}{2}\right)^2}{2}$
- Igual que en los ejercicios anteriores, considera el dato de **perímetro = 5 metros** y las dos secciones de la ventana, rectangular y semicircular para reescribir tu opción seleccionada en la pregunta anterior y obtener una función. ¿Cómo queda? Justifica tu elección.
 - $A(base) = base^2 + \frac{\pi \left(\frac{base}{2}\right)^2}{2}$
 - $A(base) = \frac{5}{2} base - \left(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\right) base^2$
 - $A(base) = base^2 + \frac{\pi}{4} base$
- ¿Qué tipo de función es? _____
- En esta función, ¿cuál es la variable dependiente? _____
- ¿Cuál es la variable independiente? _____
- ¿Cuál es el dominio de esta función? _____
- ¿Cuál es su imagen? _____

Nos interesa analizar algunos aspectos de nuestra gráfica que aún no hemos discutido. Para ello abre el archivo **laventana3.ggb** en tu dispositivo



NOTA IMPORTANTE: Cuando la secante se encuentre ubicada en un intervalo en donde la función sea decreciente el valor de $\Delta Area$ que aparece en pantalla debe registrarse con signo negativo en la tabla

Observa en esta imagen que sobre la gráfica de la función $A(\text{base})$ aparecen dos puntos A_1 y A_2 y, por esta pareja de puntos pasa una recta. Como esta recta corta a la curva en dos puntos, recibe el nombre de **SECANTE** de la curva. Además, en pantalla también tenemos la pendiente m_s de esta SECANTE (¿recuerdas que en tu curso de Geometría Analítica estudiaste el concepto de pendiente? ¿qué fórmula usabas para calcularla?)

19. Desplaza los puntos A_1 y A_2 colocándolos a ambos **antes** del punto máximo (punto más alto en la gráfica). ¿Cómo es el valor de m_s cuando A_1 y A_2 se encuentran antes de este punto?

- a) positivo b) negativo c) cero

20. ¿Porqué? _____

21. ¿Cuál es la fórmula que en este caso se utiliza para calcular m_s ? Aplica tus conocimientos de Geometría Analítica y tu experiencia en prácticas con movimiento para determinar esta fórmula _____

A esta expresión se le suele llamar en Cálculo **rapidez de cambio promedio**. Este nombre se debe a que da una idea de qué tanto cambia el área (ΔA) al tiempo que cambia la base de la ventana (Δbase).

22. Ahora, desplaza los puntos A_1 y A_2 colocándolos a ambos **después** del punto máximo. ¿Cómo es el valor de m_s cuando A_1 y A_2 se encuentran después de este punto?

- a) positivo b) negativo c) cero

23. ¿Porqué? _____

24. Enseguida, coloca a A_1 y A_2 en dos posiciones distantes y ve acercando A_1 a A_2 **GRADUALMENTE** (únicamente mueve a A_1 ; a A_2 mantenlo fijo). Para cada nueva posición de A_1 anota los valores de Δbase , de ΔA y de m en la tabla siguiente. Repite esto hasta que A_1 quede tan cerca como sea posible de A_2 . Para ello, haz **Zoom In (acercamiento)** al menos 5 veces hasta que los Δ sean del orden de las cienmilésimas.

$\Delta base$	ΔA	$m_s = \frac{\Delta A}{\Delta base}$	$ \Delta m_s $

25. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **$\Delta base$** que registraste en la tabla anterior?

- a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

26. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **ΔA** que registraste en la tabla anterior?

- a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

27. Sin embargo, al realizar estos cambios ¿qué observas que sucede con el valor de $m_s = \frac{\Delta A}{\Delta base}$ que registraste en la tabla anterior?

- a) Cada vez m_s se vuelve más grande b) Cada vez m_s se vuelve más y más pequeña
c) El valor de m_s prácticamente no cambia

Aquí es importante destacar que, si se continua acercando el punto A_1 al punto A_2 el valor de la $m_s = \frac{\Delta A}{\Delta base}$ ya no cambia. En matemáticas esto se expresa con la frase "**porque ya llegó al límite**".

28. ¿Cómo consideras el último valor de $|\Delta m_s|$?

- a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

La noción de valores numéricos infinitamente pequeños surgió en los inicios del **Cálculo** y se les dio el nombre de **DIFERENCIALES**. Son cambios infinitamente pequeños, pero que no llegan a ser iguales a cero. Por ello, para escribirlos ya no se utiliza el símbolo Δ sino que se representan con una **d** y la razón de cambio promedio que en nuestro caso es

$$m_s = \frac{\Delta A}{\Delta base}$$

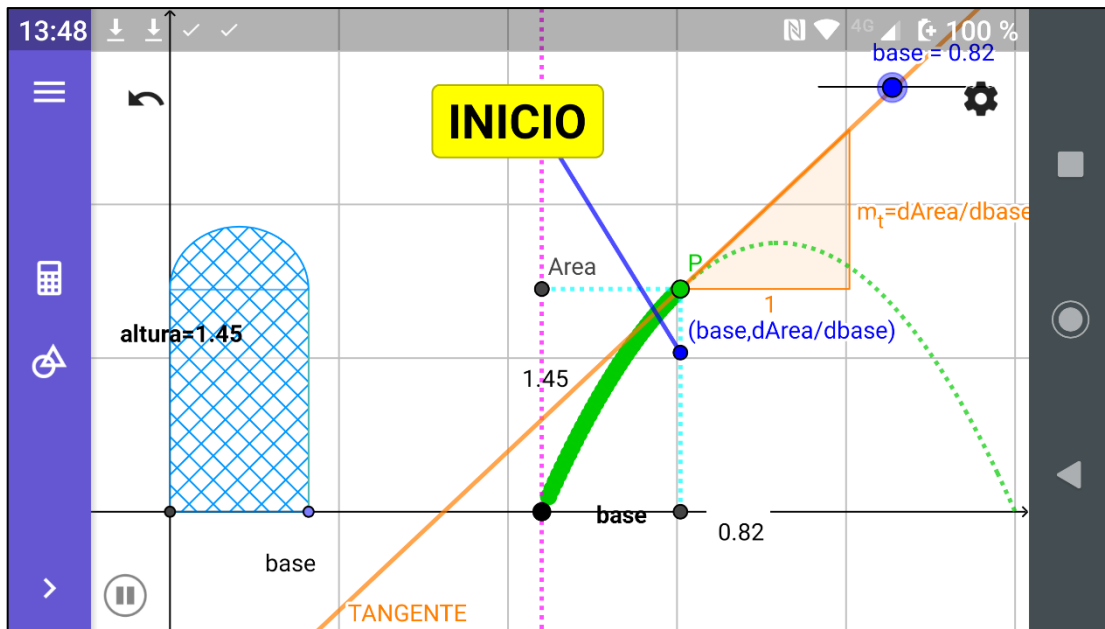
la expresamos como

$$\lim_{\Delta base \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta base} = m_t = \frac{dA}{d base}$$

que se considera una **razón instantánea de cambio**

Como ahora los puntos A_1 y A_2 se volvieron prácticamente un solo punto, entonces la recta **SECANTE** se dice que se convirtió en una recta **TANGENTE** a la curva. Y esto, ¿de qué nos sirve?

29. Para dar respuesta a esta última pregunta, carga en tu dispositivo el archivo **laventana4.ggb** y explora la construcción moviendo el deslizador **base**, que se encuentra en la parte superior de la pantalla observando qué sucede con la TANGENTE a la gráfica de $A(\text{base})$, con su pendiente m_t y con la gráfica lineal que se observa en la pantalla



30. ¿Cuál es el valor de esta área máxima, A_{\max} ? _____
31. ¿Cuál es el signo de la pendiente de la tangente (m_t) a la curva **antes** de que el punto **P** alcance el punto máximo?
 - a) positivo
 - b) negativo
32. ¿Cuál es el signo de la pendiente de la tangente (m_t) a la curva **después** de que el punto **P** alcanza el punto máximo?
 - a) positivo
 - b) negativo
33. ¿Cuánto vale la pendiente de la tangente (m_t) cuando el área de la ventana alcanza su valor más alto A_{\max} ? _____
34. Respecto de la gráfica lineal, ¿cómo son los valores de su ordenada **antes** de que el punto **P** alcance el máximo?
 - a) positivos
 - b) negativos
 - c) cero
35. En este mismo gráfico, ¿cómo son los valores de su ordenada **después** de que el punto **P** alcanza el máximo?
 - a) positivos
 - b) negativos
 - c) cero
36. ¿Cuál es el valor de la ordenada del gráfico lineal, justo cuando el punto **P** alcanza el punto máximo? _____
37. ¿Consideras que esta gráfica lineal es la gráfica de una función? _____
38. Si tu respuesta anterior es afirmativa, ¿cuáles serían las variables presentes en ella? _____

39. ¿Identificas algún tipo de relación entre las dos gráficas presentes en la pantalla? Coméntalo con tus compañeros de equipo y explícalo _____

40. Con tu maestro(a) revisarás el procedimiento para obtener, a partir de una función, una expresión para calcular su **rapidez instantánea de variación** y su relación con los procesos de **OPTIMIZACIÓN**.

41. Investiga en qué consiste la **Arquitectura Bioclimática** y qué relación tiene ésta con el tema abordado en esta actividad. Comenta tus hallazgos con tus compañeros de equipo y anota tus conclusiones _____
