INTEGRALES DEFINIDAS

Índice:

1. ***Área bajo una curva postiva*** -- ***2***
2. ***Integral definida*** -- ***4***
3. ***Propiedades de la integral definida*** --- ***6***
4. ***Teorema del valor medio*** -- ***7***
5. ***Función integral*** -- ***7***
6. ***Regla de Barrow*** --- ***7***
7. ***Cálculo de una región plana*** --- ***8***

1. Área bajo una curva positiva.

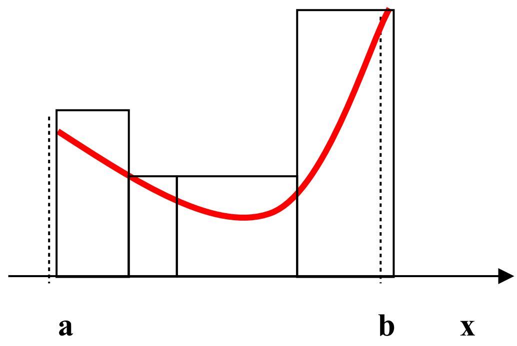
Aunque en la geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, no define el concepto general de área de una figura plana.

Si f es una función continua

$f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$.

Como la región determinado por la gráfica de f y el eje X es el conjunto:

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b], 0\leq y\leq f(x)\}$



Una primera aproximación, para calcular dicha área mediante las fórmulas de la geometría clásica, sería calcular la unión de áreas, mediante la aproximación de áreas de recintos rectangulares. Estas aproximaciones pueden efectuarse por exceso o por defecto. Además, con el fin de conseguir una buena aproximación, lo conveniente sería utilizar rectángulos lo más pequeños posibles, y con el fin de que su cálculo sea más sencillo, sería conveniente utilizar rectángulos igualmente espaciados en el eje X.

Ejemplo.- Si denominamos:

$R(A,B,C,D)$ = Rectángulo de vértices A, B, C, D ($A,B,C,D\in\mathbb{R}^2$)

Si $a\geq 0$, y consideramos la función:

$f:[0,a]\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)=x^2$

Si dividimos el segmento $[0,a]$ en n segmentos de igual longitud $\frac{a}{n}$, y trazamos los rectángulos Rs_k y RS_k , $k=1,2,\ldots,n$. Donde:

$$Rs_k=R\left(\left((k-1).\frac{a}{n},0\right),\left(k.\frac{a}{n},0\right),\left((k-1).\frac{a}{n},f\left((k-1).\frac{a}{n}\right)\right),\left(k.\frac{a}{n},f\left((k-1).\frac{a}{n}\right)\right)\right)$$

$$RS_k=R\left(\left((k-1).\frac{a}{n},0\right),\left(k.\frac{a}{n},0\right),\left((k-1).\frac{a}{n},f\left(k.\frac{a}{n}\right)\right),\left(k.\frac{a}{n},f\left(k.\frac{a}{n}\right)\right)\right)$$

Es decir:

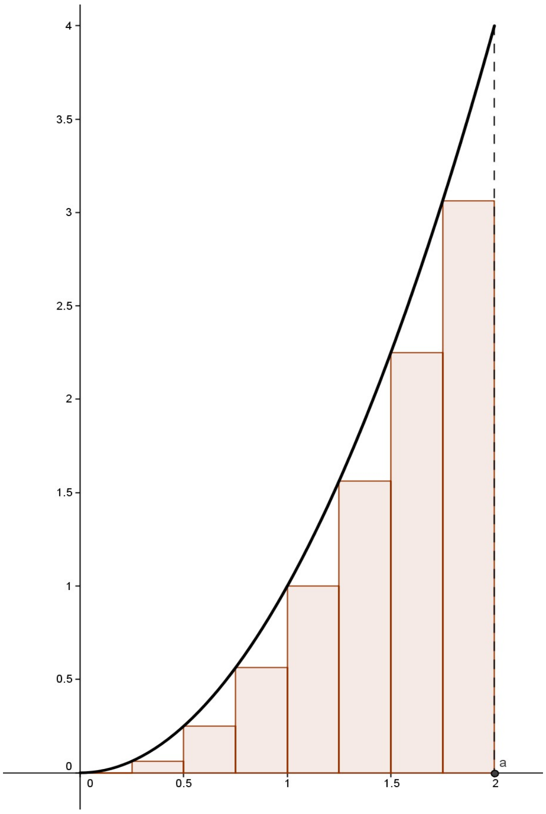
$$Rs_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k-1 \leq x \leq k,\ 0 \leq y \leq f\left((k-1).\frac{a}{n}\right)\}$$

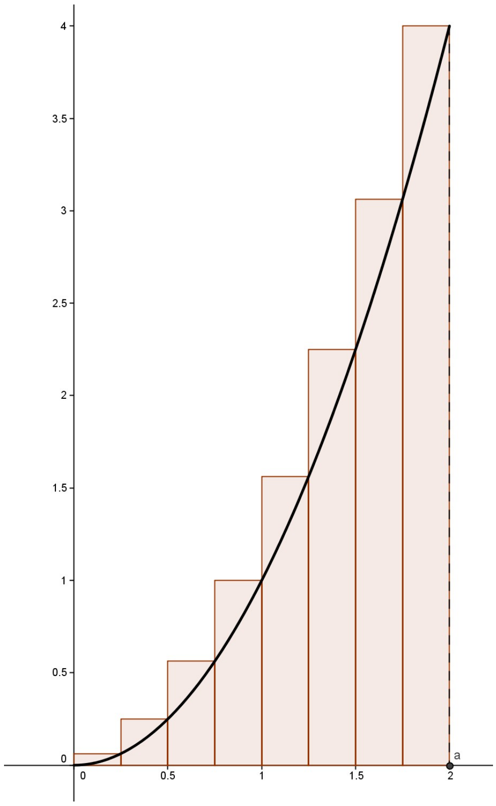
$$RS_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k-1 \leq x \leq k,\ 0 \leq y \leq f\left((k).\frac{a}{n}\right)\}$$

Y el área aproximada al conjunto

$$H = \{(x, y) \in [0, a] : 0 \leq y \leq x^2\}$$

será:





Por defecto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} Área(Rs_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}.f\left(\frac{a.(k-1)}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}.\frac{a^{2.}(k-1)^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}.\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 =$$
$$= \frac{a^3}{n^3}.\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^3}{n^3}.\frac{(n-1).n.(2.\text{n}-1)}{6}$$

Por exceso

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Área(Rs_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}.f\left(\frac{a.k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}.\frac{a^{2.}k^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}.\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$
$$= \frac{a^3}{n^3}.\frac{n.(n+1).(2.\text{n}+1)}{6}$$

0

Es decir

$$s_n \le \acute{A}rea(H) \le S_n$$

Tomando límites, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1).n.(2.n-1)}{6} = \frac{a^3}{3} \le$$
$$\le \acute{A}rea(H) \le$$
$$\le \frac{a^3}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3} . \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^3}{3}$$

2. Integral definida.

Teniendo en cuenta el ejemplo de área bajo una curva positiva en un intervalo acotado $[a,b]$ del apartado anterior, podemos generalizar, y mediante el proceso de límite de aproximaciones de áreas de rectángulos, el concepto de **integral definida** o **integral de Riemann** de la función f en $[a,b]$, cuando exista.

Para definir la integral definida de f en $[a,b]$, tenemos que introducir previamente varias definiciones:

- Partición de [a,b] en n partes iguales :

$$P_n = P_n([a,b]) = \{x_i \in [a,b] : i = 0,1,2,3,\dots,n : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b\}$$

- $P_m([a,b])$ es mas fina que $P_n([a,b])$ si $P_n([a,b]) \subset P_m([a,b])$
- Dadas dos particiones $P_m([a,b])$ y $P_n([a,b])$, siempre podemos encontrar una partición más fina que ambas, basta que tomemos $P_m([a,b]) \cup P_n([a,b])$

 # Ejemplos:

- *Los conjuntos* $P = \{0,1\}$, $P' = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$, $P''' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ *son tres particiones de* $[0,1]$ *. Donde* P'' *es más fina que* P' *, y* P' *es más fina que* P .
- *Dado un intervalo* $[a,b]$ *, los números dados por la fórmula:*

$$x_i = a + i . \frac{(b-a)}{n} ; i = 1,2,3,\dots,n$$

Constituyen una partición de [a,b] que divide en n partes iguales a este intervalo.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada en $[a,b]$ y $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$. Entonces, para cada intervalo $I_i=[x_{i-1},x_i]$ existirán los valores:

$$m_i=\mathrm{Inf}_{I_i} f(x) \qquad M_i=\mathrm{Sup}_{I_i} f(x)$$

Y definimos **sumas inferiores y sumas superiores de Riemman** de la función $f(x)$ respecto de la partición P, a los números

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i-x_{i-1})$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i-x_{i-1})$$

 # Ejemplos:

- *Si* $f(x)=C$ *(constante real) en* $[a,b]$*, como para cada* $i=1,2,3,\dots,n$ *es* $m_i=M_i=C$*, y para cualquier partición* $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ *de* $[a,b]$*, obtenemos:*

$$s(f,P)=C.\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=C.(b-a)=C.\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=S(f,P)$$

- *Si* $f(x)=\begin{cases}1 & si\, x\in\mathbb{Q}\\ 0 & si\, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ *en* $[a,b]$*, como para cada* $i=1,2,3,\dots,n$ *es* $m_i=0, M_i=1$*, y para cualquier partición* $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ *de* $[a,b]$*, obtenemos:*

$$s(f,P)=0.\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=0.(b-a)\neq(b-a)=1.\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=S(f,P)$$

Teniendo en cuenta que:

- Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo (**Sup**).
- Todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo (**Inf**).

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada en $[a,b]$, y $P_n=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, denominamos:

Integral definida inferior de $f(x)$ en $[a,b]$ a:

$$\mathrm{Sup}_{n\to+\infty}\{s(f,P_n)\}=\underline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Integral definida superior de $f(x)$ en $[a,b]$ a:

$$\mathrm{Inf}_{n\to+\infty}\{s(f,P_n)\}=\overline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Además, hay que tener en cuenta que

$$\text{Sup}_{n\to+\infty}\{s(f,P_n)\}=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \leq \quad \text{Inf}_{n\to+\infty}\{s(f,P_n)\}=\overline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Cuando dichos valores coinciden, denominamos su valor como **integral**[1] **definida de** $f(x)$ **en** $[a,b]$, y representamos por $\int_a^b f(x)\,dx$

Cuando exista la **integral definida de una función f** en un intervalo $[a,b]$, el área determinada por la función f y el eje x coincidirá, cuando f no sea negativa, en otro caso coincidirá con la integral de la función $|f|$ en $[a,b]$.

3. Propiedades de la Integral definida.

- Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $c\in(a,b)$, se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

- $$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

- Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

- Si $f(x)\,y\,g(x)$ son integrables en $[a,b]$, se cumple:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

- Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $k\in\mathbb{R}$, se cumple:

$$\int_a^b [k.f(x)]\,dx=k.\int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $f(x)\,y\,g(x)$ son funciones positivas e integrables en $[a,b]$, tales que $g(x)\geq f(x)\forall x\in[a,b]$, se cumple:

$$\int_a^b g(x)\,dx\geq\int_a^b f(x)\,dx$$

1 *Teorema:* $f(x)$ *es **integrable** en* $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon>0 \exists P_n([a,b])$ *tal que*

$$S(f,P_n)-s(f,P_n)<\epsilon$$

De este teorema, se deduce que si $f(x)$ *es continua en* $[a,b]$ $f(x)$ *es integrable en* $[a,b]$

 # Ejemplos:

$$\int_1^3 (4x+3)\,dx = 4\int_1^3 x\,dx + 3\int_1^3 dx = 4.(3-1)^2 + 3.(3-1) = 22$$

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{1}{2}(3-0)^2 = \frac{9}{2}$$

4. Teorema del valor medio.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)$$

 # Ejemplo.- El valor medio de la función continua $f(x) = x+2$ *en* $[0,2]$ *es*

$$f(c) = \frac{1}{2}.\int_0^2 (x+2).\,dx = 3 \Rightarrow c+2 = 3 \Rightarrow c = 1$$

5. Función integral.

Si $f(x)$ es una función integrable en $[a,b]$, entonces la función

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad , \text{con} \quad t \in [a,b] \quad ,$$

se denomina **función integral de** $f(x)$ **en** $[a,b]$

Teorema fundamental del cálculo integral.

Si f(x) es continua en [a,b], entonces la función integral es derivable y cumple

$$F'(t) = f(t) \forall t \in [,b]$$

 # Ejemplos:

- $F(x) = \int_1^x t.\ln t.\,dt \Rightarrow F'(x) = x.\ln x$
- $G(x) = \int_0^{x^2} (3+t).\,dt \Rightarrow G'(x) = (3+x^2).(2.x)$

6. Regla de Barrow.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, y $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^t f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

 # Ejemplos:

- $\int_2^4 (3+2x)dx = 3.\int_2^4 dx + \int_2^4 2.x\,dx = 3.[x]_2^4 + [x^2]_2^4 = 3.(4-2)+(16-4)=18$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2.\cos x + sen\,x)dx = [2.sen\,x - \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2.1-0)-(2.0-1)=2+1=3$

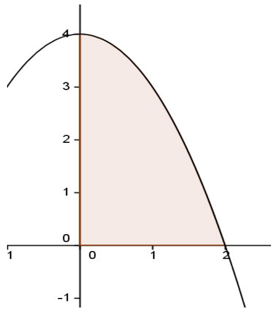
7. Cálculo de área de una región plana.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje de abscisas, viene dada por la expresión:

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

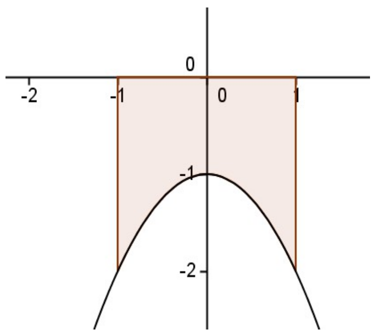
 # Ejemplos:

El área delimitada por $f(x)=-x^2+4$ *, las rectas* $x=0$ *,* $x=2$ *y el eje X, será*



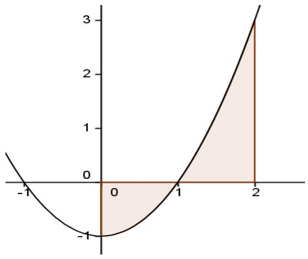
$$A=\int_0^2 |(-x^2+4)|.dx = \int_0^2 (-x^2+4).dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4.x\right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3}+8\right)-(0+0)=\frac{16}{3}$$

El área delimitada por $f(x)=-x^2-1$ *, las rectas* $x=-1$ *,* $x=1$ *y el eje X, será*



$$A=\int_{-1}^1 |(-x^2-1)|.dx = \int_{-1}^1 -(-x^2-1).dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{(-1)}{3}-1\right)=\frac{8}{3}$$

El área delimitada por $f(x)=x^2-1$ *, las rectas* $x=0$ *,* $x=2$ *y el eje X, será*



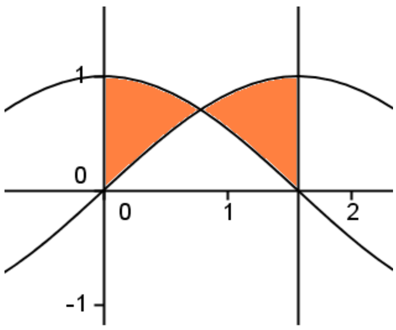
$$A=\int_0^2 |(x^2-1)|.dx=\int_0^1 -(x^2-1).dx+\int_1^2 (x^2-1).dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=2$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en $[a,b]$, el área delimitada por las dos curvas y las rectas $x=a$, $x=b$, viene dada por la expresión:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

 # Ejemplo.- El área delimitada por $f(x)=sen\,x$ *y* $g(x)=\cos x$ *, y las rectas* $x=0$ *,*

$x=\frac{\pi}{2}$ *, será*



$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |(sen\,x-\cos x)|.dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} -(sen\,x-\cos x).dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x-\cos x).dx=2.(\sqrt{(2)}-1)$$