

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgabensammlung

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Lineare Algebra	WTR

1 Aufgabe

BE

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen: Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze sowie im Alter von einem Jahr als Jungtiere bezeichnet; Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population durch Vektoren der

Form $\begin{pmatrix} K \\ J \\ E \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei K die Anzahl der Kitze, J die Anzahl der Jungtiere und E

die Anzahl der erwachsenen Tiere bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung der Population wird deren Zusammensetzung durch einen Vektor \overline{v}_0 dargestellt. Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten Jahr lässt sich durch die Matrix

$R = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $R \cdot \overline{v}_n = \overline{v}_{n+1}$ beschreiben.

1 a Stellen Sie die durch die Matrix R beschriebene Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar.

3

b Geben Sie die Bedeutung des Werts 0,65 im Sachzusammenhang an.

1

- 2 Sechs, sieben und acht Jahre nach Beobachtungsbeginn lassen sich die Zusammensetzungen der Population im Modell durch folgende Vektoren darstellen:

$$\vec{v}_6 \approx \begin{pmatrix} 500 \\ 343 \\ 603 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_7 \approx \begin{pmatrix} 585 \\ 400 \\ 705 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_8 \approx \begin{pmatrix} 684 \\ 468 \\ 824 \end{pmatrix}$$

- a Berechnen Sie im Modell die Anzahl der Kitze, die Anzahl der Jungtiere und die Anzahl der erwachsenen Tiere neun Jahre nach Beobachtungsbeginn. 2

- b Der folgenden Tabelle ist für drei Zeitpunkte jeweils zu entnehmen, um welchen Anteil die Anzahl aller Tiere der Population gegenüber dem Vorjahr zugenommen hat: 3

Zeitpunkt	sieben Jahre	acht Jahre	neun Jahre
nach Beobachtungsbeginn			
Wachstum	17 %	17 %	17 %

Bestätigen Sie rechnerisch den Wert für den Zeitpunkt acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. Stellen Sie anhand der in der Tabelle angegebenen Werte eine Vermutung dazu auf, wie sich das Wachstum der Population ohne Verwendung von Matrizen näherungsweise beschreiben lässt.

- c Berechnen Sie auf der Grundlage Ihrer Vermutung, auf wie viele Tiere die sieben Jahre nach Beobachtungsbeginn vorhandene Population nach weiteren 15 Jahren angewachsen ist. Geben Sie einen Grund dafür an, dass dieser Wert der Realität möglicherweise nicht gerecht wird. 4

- 3 Aufgrund einer Krankheit halbiert sich die Überlebensrate der Kitze. Die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr kann nun im Modell durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

$$\text{Matrix } M = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ beschrieben werden.}$$

- a Es gilt $R \cdot M = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,52 & 0,64 \\ 0 & 0,24 & 0,64 \\ a & 0,52 & 0,64 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Wert von a. 2

- b Interpretieren Sie den Term $R \cdot M \cdot \vec{v}_9$ hinsichtlich der Entwicklung der Population. 3

- 4 Um Schäden durch eine zu große Population zu vermeiden, untersucht eine Forschungsgruppe die Möglichkeit, den Tieren der Population ein Hormon zu verabreichen, das bei erwachsenen Tieren zu Unfruchtbarkeit führt. Obwohl dadurch bei den Jungtieren die Geburtenrate zunähme, bliebe durch diese Maßnahme die Anzahl der Tiere konstant. Ab dem Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons ließe sich die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr im Modell durch die Matrix $H = \begin{pmatrix} 0 & 1,25 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix}$ beschreiben.

$$\text{Matrix } H = \begin{pmatrix} 0 & 1,25 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ beschreiben.}$$

- a** Zeigen Sie, dass sich eine Population, deren Zusammensetzung durch den Vektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix}$ dargestellt wird, im Modell von einem Jahr zum nächsten nicht verändert.
- b** Zum Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons soll die Zusammensetzung der Population durch einen Vektor $\vec{w}_0 = r \cdot \vec{u}_1 + s \cdot \vec{u}_2$ dargestellt werden; dabei ist $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ und es gilt $H \cdot \vec{u}_2 = 0,8 \cdot \vec{u}_2$. Zeigen Sie, dass die Zusammensetzung der Population ein Jahr später durch den Vektor $\vec{w}_1 = r \cdot \vec{u}_1 + 0,8 \cdot s \cdot \vec{u}_2$ beschrieben wird. Weisen Sie nach, dass sich die Population mit der Zeit einer Zusammensetzung nähert, die durch einen bestimmten Vektor dargestellt wird, und geben Sie diesen Vektor an.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	Von einem Jahr zum nächsten überleben 65 % der Jungtiere.	1
2 a	$\vec{v}_9 = R \cdot \vec{v}_8 \approx \begin{pmatrix} 800 \\ 547 \\ 963 \end{pmatrix}$	2
b	$\frac{1976-1690}{1690} \approx 17\%$ Vermutung: Die Population wächst exponentiell mit dem Wachstumsfaktor 1,17.	3
c	$1690 \cdot 1,17^{15} \approx 17810$ Der Wert wird der Realität möglicherweise nicht gerecht, da die durch das Modell beschriebene Entwicklung beispielsweise durch eine Krankheit gestört werden könnte.	4
3 a	$a = 0 \cdot 0 + 0,65 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0 = 0,26$	2

	b	Der Vektor \vec{v}_9 stellt die Zusammensetzung der Population neun Jahre nach Beobachtungsbeginn dar. Zehn Jahre nach Beobachtungsbeginn ergab sich aufgrund der Krankheit die durch $M \cdot \vec{v}_9$ gegebene Zusammensetzung. Die Krankheit trat offenbar nur für ein Jahr auf, sodass die Entwicklung anschließend wieder durch die Matrix R beschrieben werden kann. Der Term beschreibt die Zusammensetzung der Population elf Jahre nach Beobachtungsbeginn.	3
4	a	$H \cdot \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1,25 \cdot 200 \\ 0,8 \cdot 250 \\ 0,65 \cdot 200 + 0,8 \cdot 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$	2
	b	$\vec{w}_1 = H \cdot \vec{w}_0 = H \cdot r \cdot \vec{u}_1 + H \cdot s \cdot \vec{u}_2 = r \cdot H \cdot \vec{u}_1 + s \cdot H \cdot \vec{u}_2 = r \cdot \vec{u}_1 + 0,8 \cdot s \cdot \vec{u}_2$ <p>Mit $H^n \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1$ und $H^n \cdot \vec{u}_2 = 0,8^n \cdot \vec{u}_2$ ergibt sich:</p> $\vec{w}_n = H^n \cdot \vec{w}_0 = H^n \cdot r \cdot \vec{u}_1 + H^n \cdot s \cdot \vec{u}_2 = r \cdot H^n \cdot \vec{u}_1 + s \cdot H^n \cdot \vec{u}_2 = r \cdot \vec{u}_1 + s \cdot 0,8^n \cdot \vec{u}_2$ <p>Damit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{w}_n = r \cdot \vec{u}_1$</p>	5
			25

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	X								I			X		
b	1	X							I			I	X		
2 a	2	X							I		I	I	X		
b	3	X				X	II		II		II			X	
c	4	X				X	I		II		II			X	
3 a	2	X						I			II			X	
b	3	X					II		III			II			X
4 a	2	X									II	II		X	
b	5	X					III	III			III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.