UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
Prof. Dr. Anderson Roges T. Góes

CD031 e CEG204

Desenho Geométrico I

Apostila elaborada por: Profa. Dra. Deise Maria Bertholdi Costa e Profa. Dra. Elen Andrea Janzen
Complementada por: Prof Dr. Anderson Roges T. Góes

1 POSTULADOS DO DESENHO GEOMÉTRICO

Assim como no estudo da Geometria se aceitam, sem definir e sem demonstrar certas proposições primitivas (ou postulados, ou axiomas), no estudo do Desenho é necessário aceitar certos postulados que tornam a matéria objetiva.

1º Postulado: Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico, além do lápis, papel, borracha e prancheta, são: a régua não graduada e o compasso.
A graduação da régua ou "escala" só pode ser usada para colocar no papel os dados de um problema ou eventualmente para medir a resposta, a fim de conferí-la.

2º Postulado: É proibido em Desenho Geométrico fazer contas com as medidas dos dados; todavia, considerações algébricas são permitidas na dedução (ou justificativa) de um problema, desde que a resposta seja depois obtida graficamente obedecendo aos outros postulados.

3º Postulado: Em Desenho Geométrico é proibido obter respostas "à mão livre", bem como "por tentativas".
Admite-se, no entanto, o traçado de uma cônica à mão livre ou com o uso de curvas francesas, desde que a resposta de um problema não seja obtida através desse traçado.

2 NOÇÕES DE GEOMETRIA PLANA

3.1 GEOMETRIA

A necessidade de medir terras determinou os primeiros passos da Geometria. O filósofo grego Eudemo de Rodes, séc. IV a.C., um dos primeiros historiadores das ciências, conta que os egípcios mediam suas terras para acompanhar o regime de inundações anuais do rio Nilo. O termo provém das palavras gregas geo (terra) e metron (medida).

Atualmente, define-se a Geometria como sendo a disciplina matemática que tem por objetivo o estudo do espaço e das formas nele contidas.

3.2 ASPECTOS HISTÓRICOS

Nas antigas culturas do Egito e da Mesopotâmia, a geometria consistia simplesmente num conjunto de regras empíricas. Os gregos, entre os quais destacou-se Euclides, séc. III a.C., sistematizaram os conhecimentos existentes sobre o tema e estabeleceram seus fundamentos num conjunto de axiomas (ou postulados ou proposições primitivas) dos quais, segundo princípios dedutivos, se obtinham os demais resultados (proposições ou teoremas).

A discussão dos princípios da Geometria Euclidiana levou à construção, no séc. XIX, de novos sistemas geométricos, denominados geometrias não-euclidianas, e desembocou na generalização de seus métodos e sua aplicação a espaços cada vez mais abstratos. (Enciclopédia Barsa)

3.3 NOÇÕES PRIMITIVAS, AXIOMAS, DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Adotaremos, sem definição, as noções de ponto, reta e plano.

***Notação*:**

O ponto é representado por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C,..., P, Q, R, S,...); a reta é representada por letras minúscula (a, b, c, ... , r, s, t, u,...); e o plano é representado por letras gregas ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$).

Axiomas:

A1. Num plano existem infinitos pontos.

A2. Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

A3. Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.

A4. Por um ponto fora de uma reta passa somente uma reta paralela à ela.

Definições:

D1. Chama-se ponto médio de um segmento de reta AB o ponto desse segmento que o divide em dois segmentos congruentes.

D2. Bissetriz de um ângulo é uma semi-reta que tem sua origem no vértice desse ângulo e divide-o em dois ângulos adjacentes e congruentes.

Teoremas:

T1. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam pares de ângulos que são ou suplementares ou congruentes.

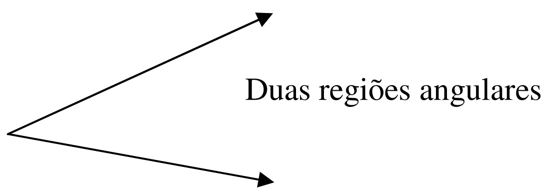
T2. Num triângulo qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

3.4 ÂNGULOS

Definição: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.

Elementos: lados, vértice, espaço angular.

Notação: AÔB, ∠AOB, Ô, ∠O, α . β ...



Definições: Dois ângulos são:

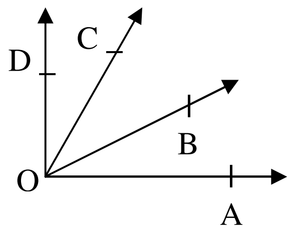
a) **consecutivos:** quando possuem o mesmo vértice e têm um lado comum;

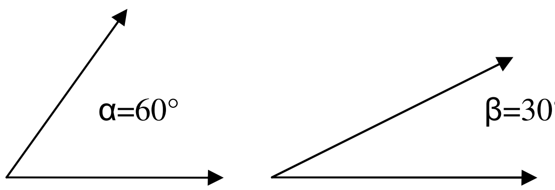
b) **adjacentes:** quando são também consecutivos e não têm pontos internos comuns;

c) **complementares:** quando a soma de suas medidas é 90º;

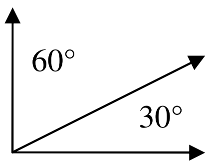
d) **suplementares:** quando a soma de suas medidas é 180º;

e) **congruentes:** quando possuem medidas iguais.





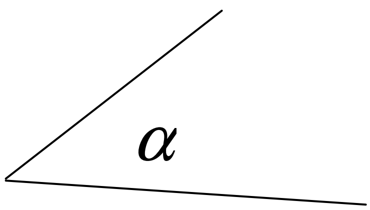
α e β são complementares



O complento de 60° é 30°

A semi-reta com origem no vértice de um ângulo e que divide-o em dois outros ângulos congruentes é chamada de **Bissetriz**. (A bissetriz é um lugar geométrico, e será estudado com mais detalhe nos próximos tópicos, neste momento faremos apenas a construção).

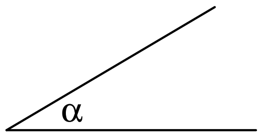
Determine a bissetriz do ângulo α

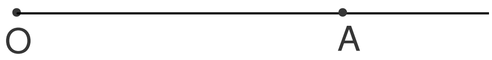


Ângulos Fundamentais

Construir com régua e compasso os ângulos de 60º, 30º, 90º e 45º.

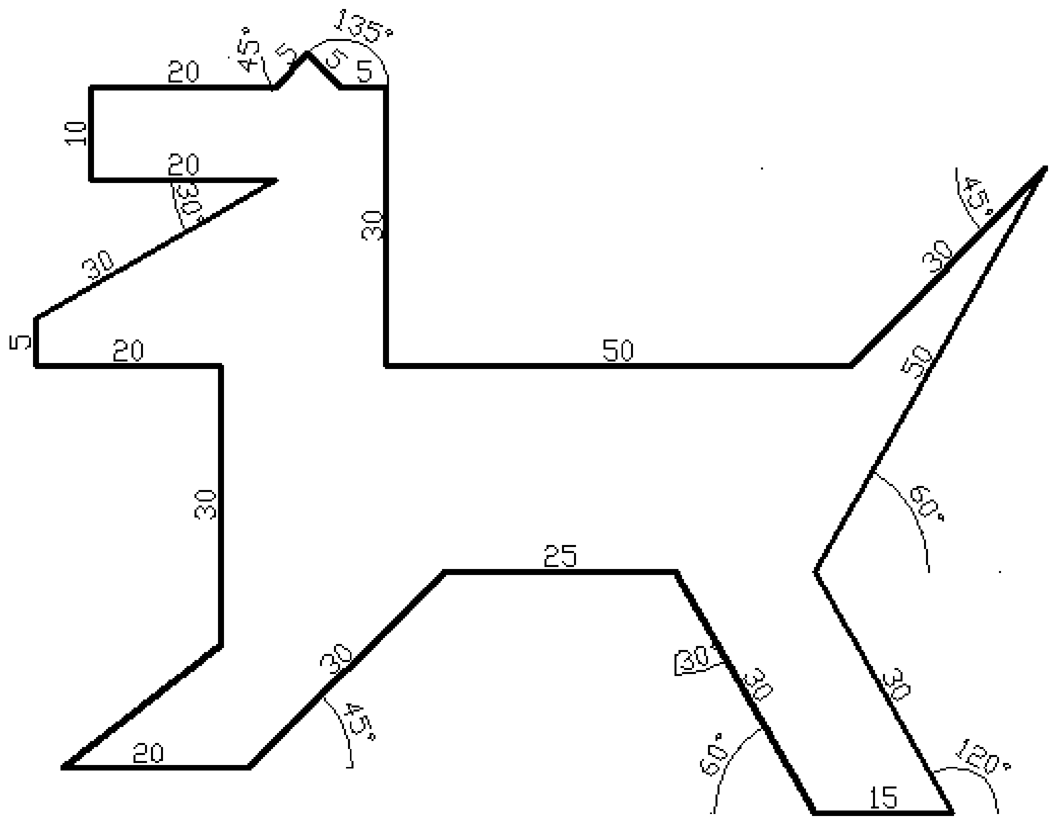
Transportar o ângulo de medida α dado, sabendo-se que O será o seu vértice e a semi-reta OA dada um de seus lados.





Exercício

1) Repoduzir a figura em escala 2:1 utilizando régua e compasso.



A Reta no Plano

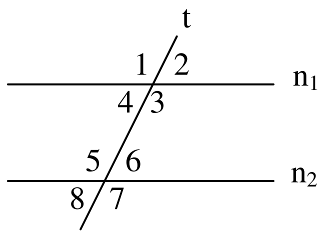
Quanto à posição relativa entre duas retas no plano, elas podem ser: paralelas (caso especial: coincidentes), concorrentes ou secantes (caso especial: perpendiculares).

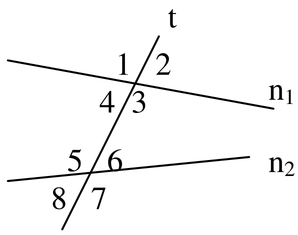
Definições:

1) Duas retas são perpendiculares quando formam entre si ângulos de 90º.

2) Mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB passando pelo ponto médio desse segmento. (A Mediatriz é um lugar geométrico, e será estudado com mais detalhe nos próximos tópicos, neste momento faremos apenas a construção).

Quando duas retas (não necessariamente paralelas) são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulos.





Chamam-se ângulos:

- correspondentes: 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8.
- opostos pelo vértice: 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8.
- internos - entre as retas n1 e n2: 3, 4, 5, 6.
- externos - fora das retas n1 e n2: 1, 2, 7, 8.
- colaterais - aqueles que estão de um mesmo lado da transversal:
  - colaterais internos: 3 e 6, 4 e 5.
  - colaterais externos: 1 e 8, 2 e 7.
- alternos - aqueles que estão em semi-planos opostos em relação a transversal:
  - alternos internos: 4 e 6, 3 e 5.
  - alternos externos: 1 e 7, 2 e 8.

Definição: Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro.

Propriedades:

1) Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

2) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam pares de ângulos que são ou suplementares ou congruentes.

3.5 TRIÂNGULOS

Definição: Dados três pontos A, B e C, no plano e não-colineares, a figura formada pelos segmentos AB, BC e AC chamamos de triângulo.

Propriedades

P1. Num triângulo qualquer, a soma das medidas dos **ângulos internos** é igual a 180º.

P2. Em todo triângulo, a medida de um **ângulo externo** é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

P3. O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do seu comprimento.

P4. A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior que o comprimento do 3º lado.

Definição: Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta que contém B e C, temos que:

- O segmento AD chama-se **mediana** do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC;
- O segmento AD chama-se **bissetriz** do ângulo A se a semi-reta AD separa o ângulo CÂB em dois ângulos iguais, isto é, se CÂD=DÂB; e
- O segmento AD é a **altura do triângulo** relativamente ao lado BC, se a reta que contém o segmento AD for perpendicular à reta que contém B e C.

Classificação dos triângulos

Quanto aos lados podemos classificar os triângulos em:

- Escaleno
- Isósceles
- Eqüilátero

Quanto aos ângulos podemos classificar os triângulos em:

- Acutângulo
- Retângulo
- Obtusângulo
- Eqüiângulo

Propriedades do triângulo isósceles:

P1. Num triângulo isósceles os ângulos da base são ___________________.

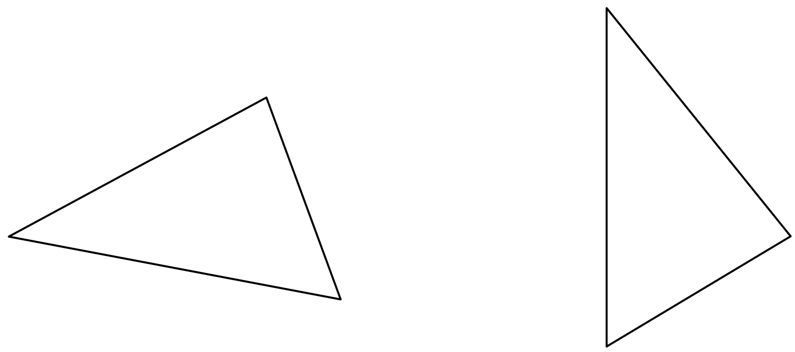
P2. A altura relativa à base num triângulo isósceles é também ___________, ________________, _______________________________________.

3.6 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definições:

1) Diz-se que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes quando $\overline{AB}=\overline{CD}$; e que dois ângulos Â e $\hat{B}$ são congruentes quando eles têm a mesma medida.

2) Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.



Quando escrevemos $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$ significa que os triângulos ABC e EFG são congruentes e que a congruência leva A em E, B em F e C em G.

Existem cinco casos de congruência e com o auxilio da congruência de triângulos é que se demonstra grande parte dos teoremas fundamentais da geometria. O primeiro caso é um axioma, a partir dele podemos demonstrar todos os outros casos.

1°) Axioma (LAL): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB}=\overline{EF}$, $\overline{AC}=\overline{EG}$ e Â=Ê, então $\Delta ABC = \Delta EFG$.

2°) Propriedade (ALA): Dados dois triângulos ABC e EFG, se Â=Ê, $\overline{AB}=\overline{EF}$ e $\hat{B}=\hat{F}$, então $\Delta ABC = \Delta EFG$.

3°) Propriedade (LLL): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB}=\overline{EF}$, $\overline{BC}=\overline{FG}$ e $\overline{AC}=\overline{EG}$, então $\Delta ABC=\Delta EFG$.

4°) Propriedade (HCA$_r$): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB}=\overline{EF}$, $\overline{BC}=\overline{FG}$ e $\hat{C}=\hat{G}=90°$, então $\Delta ABC=\Delta EFG$.

5°) Corolário (ALA$_o$): Dados dois triângulos ABC e EFG, se Â=Ê , $\overline{AB}=\overline{EF}$ e $\hat{C}=\hat{G}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$.

Observação: LLA não é critério de congruência.

3.7 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição: Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que **ângulos correspondentes sejam iguais** e **lados correspondentes sejam proporcionais**.

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{E}, \hat{B}=\hat{F}, \hat{C}=\hat{G} \text{ e} \\ \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{GE}}=k \end{cases}$$

Existem 4 casos de semelhança. Os casos de semelhança podem ser obtidos através do Teorema de Tales.

1°) Propriedade (AA): Dados dois triângulos ABC e EFG, se Â=Ê e $\hat{B}=\hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

2°) Propriedade (L$_p$AL$_p$): Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se Â=Ê e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes

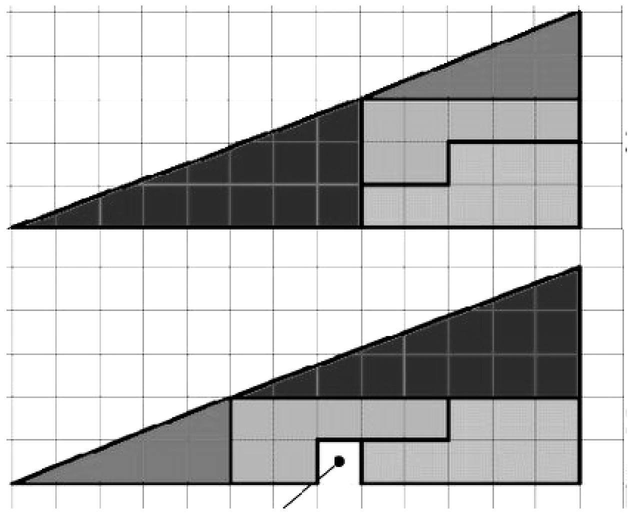
3°) Propriedade ($L_pL_pL_p$): Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$ então os triângulos são semelhantes.

4°) Propriedade ($L_pL_pA_r$): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e $\hat{C} = \hat{G}$ =90°, então ΔABC=ΔEFG.

Observação: L_pL_pA não é critério de semelhança.

Exercícios

1) Repoduzir a figura abaixo, onde cada quadricula possui 1cm de lado. Porque na segunda figura há um espaço em branco?

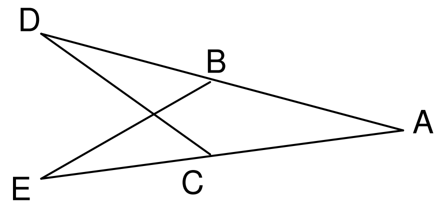


2) Dois triângulos congruentes são semelhantes?

3) Sabe-se que $\overline{AB}=\overline{AC}$ e $\overline{BD}=\overline{CE}$. Mostre que:

a) $\Delta ACD \equiv \Delta ABE$

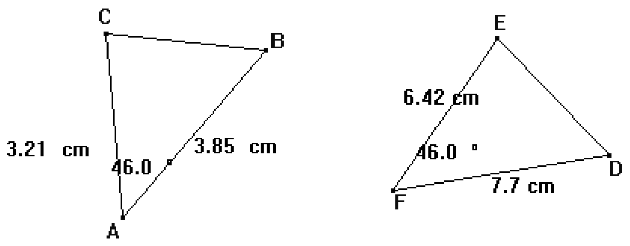
b) $\Delta BCD \equiv \Delta CBE$



4) As figuras somente estão com os valores corretos. Compare os triângulos dados e responda:

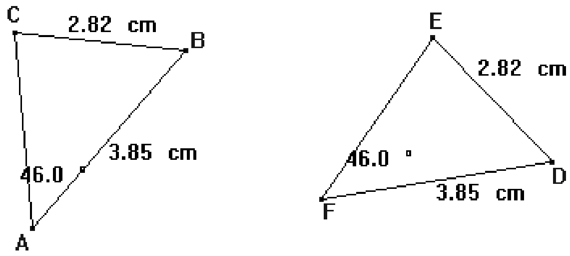
a) Os triângulos ________ e ________ são ___________, pois:

Então: ___________________________.



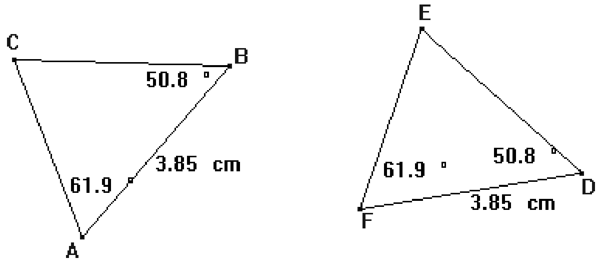
b) Os triângulos _______ e ________ são ___________, pois:

Então: ___________________________.



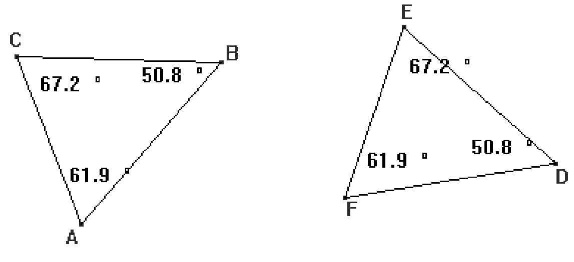
c) Os triângulos ________ e ________ são ___________, pois:

Então: ___________________________.



d) Os triângulos ________ e _______ são ___________, pois:

Então: ___________________________.



3 LUGARES GEOMÉTRICOS

Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto basta obter o cruzamento entre duas linhas.

Definição: Um conjunto de pontos do plano constitui um lugar geométrico (LG) em relação a uma determinada propriedade P quando satisfaz às seguintes condições:

a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;
b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

Observação: Na resolução de problemas, procuramos construir graficamente uma determinada figura, mas que satisfaça as condições impostas (ou propriedades). Geralmente, estas condições impostas são lugares geométricos construtíveis com régua e compasso. O emprego de figuras que constituem lugares geométricos nas resoluções de problemas gráficos é chamado de Método dos Lugares Geométricos.

Como utilizar o método dos lugares geométricos:

Procura-se um ponto que satisfaça as condições impostas num problema. Então:

- Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura rascunho (não é uma figura malfeita, mas uma na qual os elementos não têm as medidas de fato desejadas) onde destaca-se o ponto procurado;
- Pesquisam-se, na figura rascunho, 2 propriedades, $\varphi 1$ e $\varphi 2$, desse ponto, que definam 2 lugares geométricos aos quais ele pertence; e
- Constroem-se esses LG obtendo o ponto na interseção de ambos.

4 LG 1 - CIRCUNFERÊNCIA

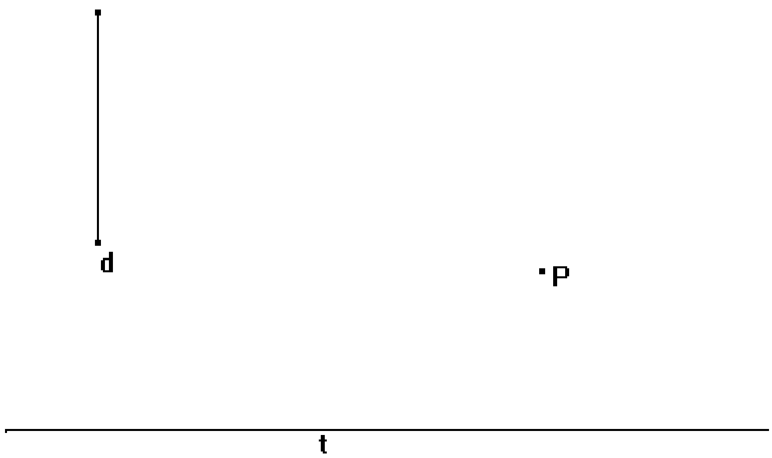
Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano situados a uma distância constante r de um ponto fixo O é a circunferência de centro O e raio r.

Notação: Circunf(O,r).

Sempre que um ponto procurado estiver a uma distância r conhecida de um ponto P conhecido, esse ponto pertencerá à circunferência de centro P e raio r.

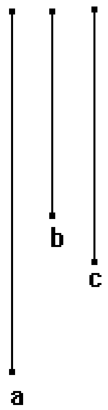
Exercícios

1) São dados um ponto P, uma reta t e uma distância d. Determinar um ponto X de t que diste d de P.



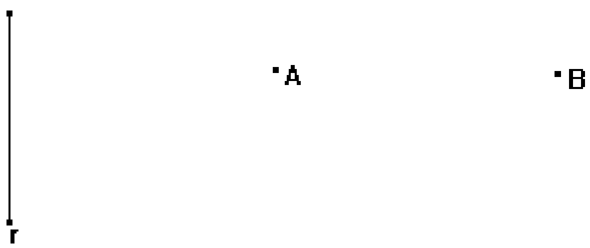
Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

2) Construir um triângulo ABC sendo dados os três lados a, b e c.



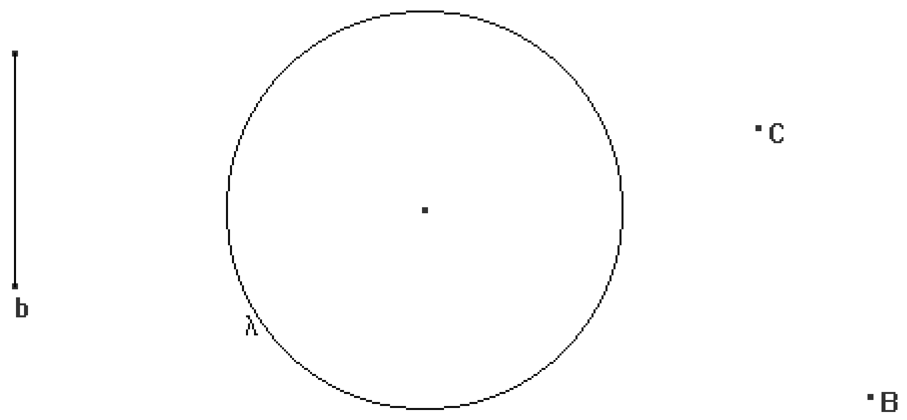
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

3) São dados dois pontos, A e B, e uma distância r. Construir uma circunferência que passa por A e B e que tenha raio igual a r.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

4) São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC, conhecendo o lado b e sabendo que o vértice A pertence à circunferência λ.



Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

5) Marque no papel dois pontos A e B distantes 7cm um do outro.

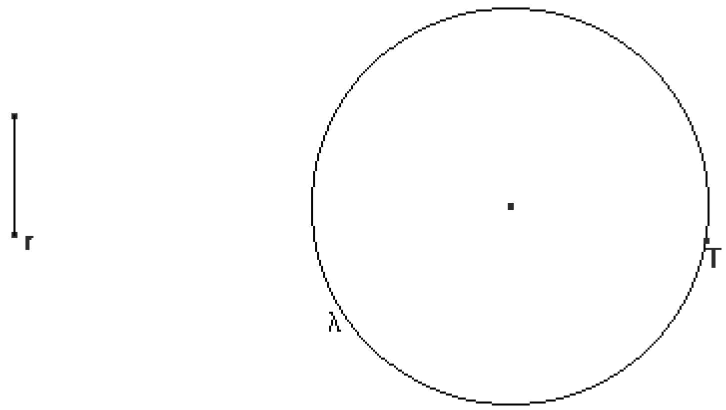
a) Determine um ponto X distante 5cm de A e 4cm de B. Quantas soluções têm o problema?

b) Determine um ponto Y distante 4cm de A e 3cm de B. Quantas soluções têm o problema?

c) Determine um ponto X distante 3cm de A e 2cm de B. Quantas soluções têm o problema?

6) São dados uma circunferência λ, um ponto T sobre λ e uma distância r. Construir uma circunferência de raio r que seja tangente a λ no ponto T.

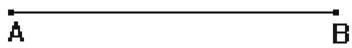
<u>Dica</u>: os centros das circunferências tangentes e o ponto de tangência são colineares.



Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

5 LG 2 - MEDIATRIZ

Definição: O lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB.



Propriedade: A mediatriz de um segmento AB é uma reta perpendicular à reta AB e passa pelo ponto médio do segmento AB.

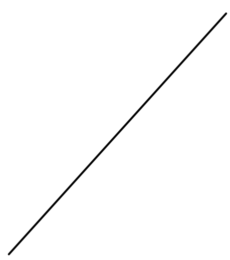
Definições:

1) Uma circunferência é dita circunscrita a um triângulo quando ela passa pelos seus três vértices. O centro da circunferência circunscrita é denominado **circuncentro**.

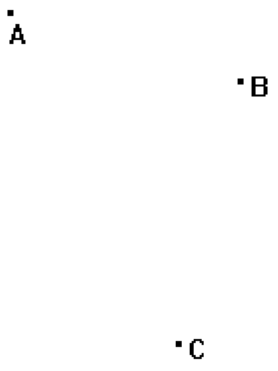
2) Circuncentro é o encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo.

Exercícios

1) Determinar o ponto médio dos segmentos.

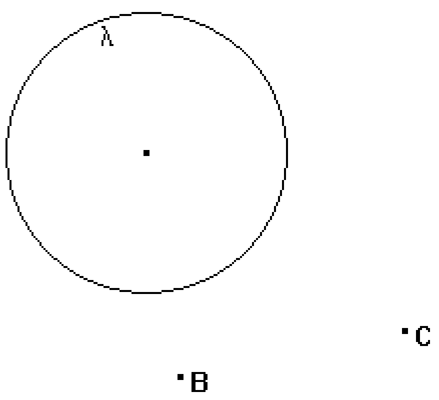


2) Dados três pontos A, B e C, não colineares, construir a circunferência que passe por esses pontos.



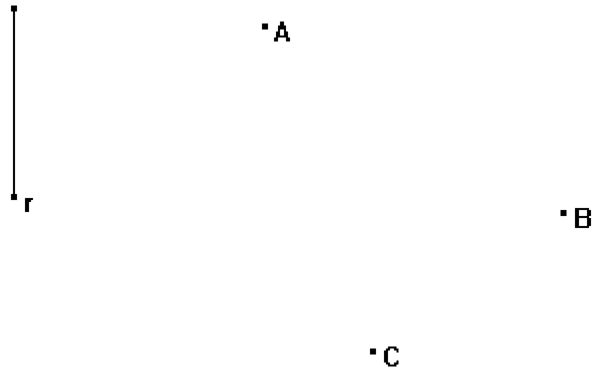
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

3) São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construir um triângulo ABC isósceles, de base BC, sabendo-se que o vértice A pertence a λ.



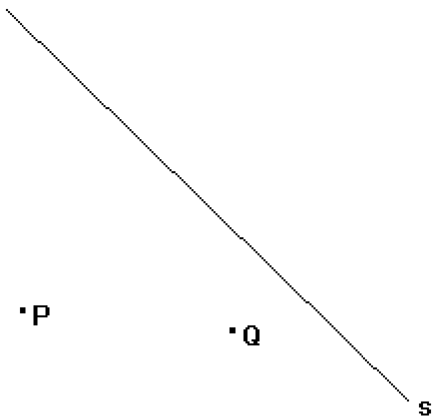
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

4) São dados os pontos A, B e C, e uma distância r. Determinar um ponto X, tal que a distância de X a B seja igual a r e X seja eqüidistante de A e C.



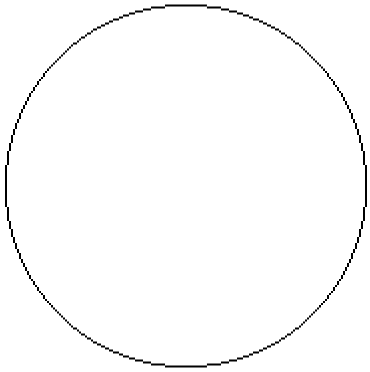
Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

5) São dados os pontos P e Q e uma reta s. Construir uma circunferência que passe por P e Q, sabendo que seu centro pertence à reta s.



Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

6) Dada uma circunferência de centro desconhecido, obter seu centro.



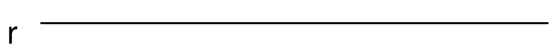
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

6 LG 3 - PARALELAS

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância dada d de uma reta dada r **compõe-se de duas retas s1 e s2 paralelas à reta r** e que têm distância até ela igual à distância dada.

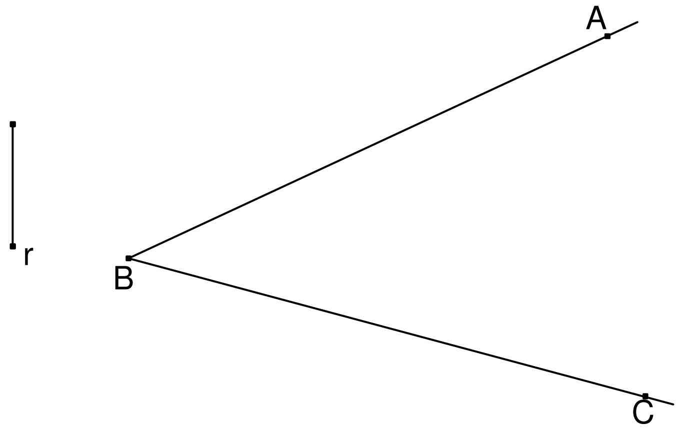
Exercícios

1) Dada uma reta r, construir o LG dos pontos que distam 2cm de r.



Procedimento:

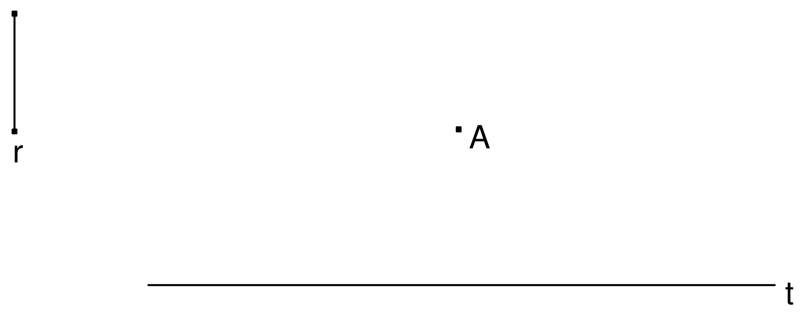
2) São dados um ângulo $A\hat{B}C$ e uma distância r. Construir uma circunferência de raio r tangente aos lados do ângulo dado.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

3) São dados um ponto A, uma reta t e uma distância r. Construir uma circunferência de raio r, que passe pelo ponto A e seja tangente à reta t.

Dica: a reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

7 LG 4 - BISSETRIZ

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes de duas retas concorrentes dadas compõe-se de duas outras retas, perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos formados pelas retas dadas.

Definição: Uma circunferência é dita inscrita a um triângulo quando ela for tangente aos lados do triângulo. O centro da circunferência inscrita é denominado **incentro.**

Exercícios

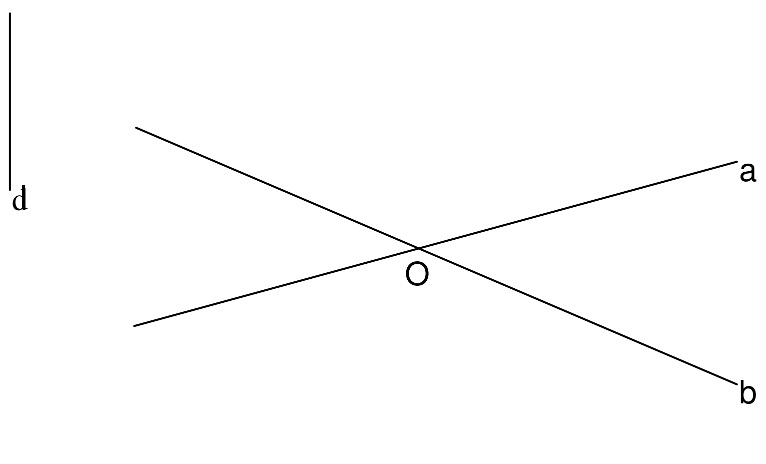
1) Determinar graficamente, o comprimento do raio da circunferência inscrita num triângulo retângulo cujos catetos medem 6cm e 8cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

2) Construir a circunferência inscrita num triângulo equilátero de lado l = 7cm. Quanto mede (determinar algebricamente) o raio dessa circunferência?

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

3) São dadas duas retas concorrentes a e b e uma distância d. Sendo O o ponto de interseção de a e b, determinar um ponto X que seja eqüidistantes das retas, sabendo-se que a sua distância a O é igual a d.



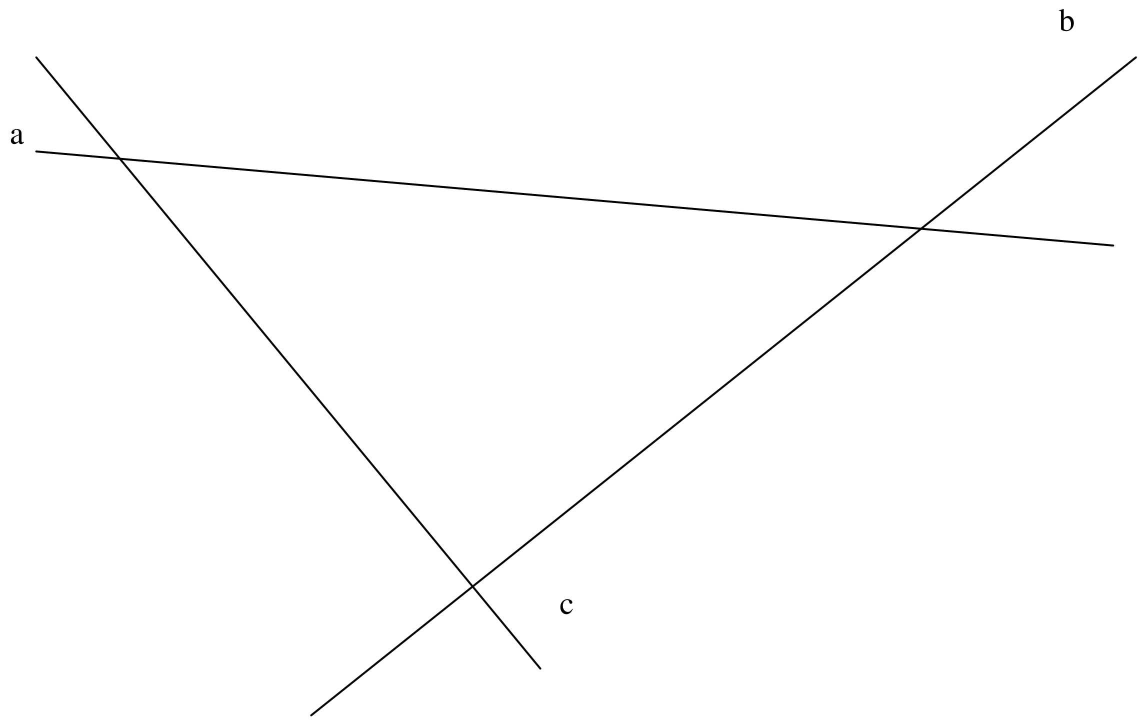
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

Definição: Uma circunferência é ex-inscrita ao triângulo quando ela for tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois. O centro da circunferência ex-inscrita é denominado de **ex-incentro**.

4) Construir a circunferência inscrita ao triângulo ABC dado, e uma circunferência ex-inscrita. Dados: a=90mm, b=75mm, c=60mm.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

5) Dadas as retas a, b e c, concorrentes duas a duas. Construir uma circunferência tangente à retas b e c, sabendo que seu centro pertence à reta a.



6) Dadas as retas a, b e c, concorrentes duas a duas. Construir uma circunferência tangente à três retas dadas.