

# Konfidenzintervalle

*Ferdinand Österreicher*

FB Mathematik der Universität Salzburg

Lehrer/innen/fortbildungstag "West"

Innsbruck, 25. März 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerte</b>	<b>7</b>
2.1	Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten . . . . .	9
2.1.1	Ermittlung eines Konfidenzintervalls . . . . .	9
2.1.2	Folgerungen aus der konkreten Gestalt des Näherungs- konfidenzintervalls . . . . .	12
2.1.3	Anmerkungen zur Versuchsplanung . . . . .	13
2.1.4	Angabe der Parametermenge, für welche die Normalap- proximation gerechtfertigt ist . . . . .	14
2.1.5	Durchführung eines Urnenversuchs und Interpretation .	14
2.2	Konfidenzintervalle für Anteilswerte . . . . .	15
2.3	Geometrie des Score-Konfidenzintervalls . . . . .	17
2.4	Vergleich des Score-Konfidenzintervalls mit dem Wald'schen Approximationsintervall . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Konfidenzintervalle für den Erwartungswert der Normalverteilung</b>	<b>25</b>
3.1	Bekannte Varianz . . . . .	25
3.2	Unbekannte Varianz . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Abschließende Anmerkungen</b>	<b>29</b>
4.1	Historisches . . . . .	29
4.2	Cartoon . . . . .	30



# Kapitel 1

## Einleitung

Die **Statistik** zerfällt in die beiden Teilgebiete

- **Beschreibende Statistik** und
- **Beurteilende Statistik**.

Während die mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten, welche für die beschreibende Statistik erforderlich sind, im Wesentlichen die vier Grundrechnungsarten sind, beruht die beurteilende Statistik auf stochastischen Modellen und setzt daher entsprechende Kenntnisse aus Wahrscheinlichkeitsrechnung voraus.

Die **Beurteilende Statistik** umfasst folgende beiden Teilgebiete: Das

- **Testen von Hypothesen** und das
- **Schätzen von Parametern**.

Das Testen von Hypothesen ist - auf den Punkt gebracht - "die stochastische Form des indirekten Schlusses" und, nach Auffassung des Autors, im Regelfall schwieriger zu vermitteln als das Schätzen von Parametern. Hilfreich für das Verständnis des Testens sind Kenntnis des Prinzips der Rechtssprechung im Strafrecht und/oder Vertrautheit mit einander (jedenfalls teilweise) widersprechend wissenschaftlichen Modellen, wie sie insbesondere in der Geschichte der Astronomie und der Physik anzutreffen sind.

Das Schätzen von Parametern zerfällt in die beiden Teilgebiete

- **Punktschätzer** und
- **Intervallschätzer** (insbesondere Konfidenz- oder Vertrauensintervalle).

Das Thema dieses Referats sind Konfidenzintervalle

- für Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerte und

· für den Erwartungswert der Normalverteilung.

# Kapitel 2

## Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerte

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen, die wir "Erfolg" und "Misserfolg" nennen. Die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges sei für jede Durchführung des Experiments gleich  $p \in (0, 1)$ . Es werden  $n$  solcher Zufallsexperimente durchgeführt, die Ergebnisse  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  der einzelnen Experimente festgestellt und protokolliert. Dabei sei

$$X_i = 1 \quad \text{oder} \quad X_i = 0,$$

je nachdem ob beim  $i$ -ten Experiment Erfolg oder Misserfolg eintritt. Aufgrund des Versuchsergebnisses  $(X_1, \dots, X_n)$  sei für die Wahrscheinlichkeit  $p$  ein Konfidenzintervall anzugeben.

Bezeichnen  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  die beobachtete Anzahl der Erfolge und  $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$  den zugehörigen Anteil der Erfolge. Aufgrund des empirischen Gesetzes der Großen Zahlen ist  $\hat{p}_n$  ein naheliegender Schätzer für  $p$ . Diese Tatsache wird durch dessen theoretisches Gegenstück, nämlich das *Bernoullische* Gesetz der Großen Zahlen, bestätigt. Außerdem gilt aufgrund der Linearität des Erwartungswerts  $E(\hat{p}_n) = p$ , sodass  $\hat{p}_n$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $p$  ist. Da sich unter den im nachstehenden Urnenmodell präzisierten Voraussetzungen überdies zeigen lässt, dass  $\hat{p}_n$  unter allen erdenklichen erwartungstreuen Schätzern jener mit kleinstmöglicher Varianz ist, ist  $\hat{p}_n$  auch zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls für  $p$

bestmöglich geeignet.

Wir unterscheiden zwei Klassen von Anwendungen:

In der Klasse 1) laufen die Experimente stets unter den gleichen Bedingungen ab. Dementsprechend beeinflussen einander die Ergebnisse der einzelnen Experimente nicht. Man sagt, die Experimente sind *unabhängig*.

In der Klasse 2) bestehen die einzelnen Experimente darin, dass man einer Grundgesamtheit Elemente zufällig entnimmt und diese der Grundgesamtheit nicht wieder hinzufügt.<sup>1</sup> Die Größe  $p$  ist in diesem Fall der Anteil der Elemente der Grundgesamtheit mit einer bestimmten Eigenschaft. Der Gesamtversuch besteht darin, dass man der Grundgesamtheit  $n$  Elemente entnimmt. Man nennt einen solchen Versuch eine (*Zufalls-*)*Stichprobe vom Umfang  $n$* .

Die beiden Klassen von Anwendungen lassen sich bekanntlich durch folgendes Urnenmodell beschreiben: Eine Urne enthalte  $s$  schwarze und  $w$  weiße Kugeln, welche - von ihrer Farbe abgesehen - ununterscheidbar sind. Ferner bezeichne  $N = s + w$  die Gesamtanzahl der Kugeln in der Urne.

Es werden  $n$  Kugeln zufällig und 1) mit Zurücklegen bzw. 2) ohne Zurücklegen gezogen. Für den Anteil  $p = \frac{s}{N}$  der schwarzen Kugeln in der Urne ist mit Hilfe des Anteils  $\hat{p}_n$  der schwarzen Kugeln in der Stichprobe ein Konfidenzintervall zu konstruieren.

Bezeichnen  $B_{n,p}$  die Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$  und  $H_{n,N,s}$  die Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $n$ ,  $N$  und  $s$ . Dann gelten für Verteilung, Erwartungswert und Varianz von  $S_n$  in den Fällen 1) respektive 2) bekanntlich

$$\begin{aligned} S_n &\sim B_{n,p} & , & \quad E(S_n) = np & \quad \text{und} & \quad V(S_n) = np(1-p) \\ S_n &\sim H_{n,N,s} & , & \quad E(S_n) = n\frac{s}{N} & \quad \text{und} & \quad V(S_n) = n\frac{s}{N}\left(1 - \frac{s}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \end{aligned}$$

Wir gehen im folgenden stets davon aus, dass der Stichprobenumfang  $n$  so groß ist, dass im Fall 1) die Normalapproximation der Binomialverteilung und im Fall 2) die Normalapproximation der Hypergeometrischen Verteilung

---

<sup>1</sup>In der Qualitätskontrolle ist das Feststellen der Ergebnisse der einzelnen Experimente oft damit verbunden, dass die entnommenen Elemente zerstört werden. Es wäre daher absurd, die entnommenen Elemente der Grundgesamtheit wieder hinzuzufügen. In der Meinungsforschung ist dies deswegen unangebracht, da man ansonst ein- und dieselbe Person mehrfach befragen könnte.



gerechtfertigt ist<sup>2</sup>. Im Fall 2) haben wir wegen  $n \leq N$  zudem vorauszusetzen, dass die Grundgesamtheit  $N$  (um einiges) größer als  $n$  ist.

## 2.1 Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten

### 2.1.1 Ermittlung eines Konfidenzintervalls

Unter der genannten Voraussetzung gilt für  $z > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \leq z\right) \cong 2\Phi(z) - 1.$$

Seien nun  $\alpha \in (0, 1)$  und  $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ . Dann gilt für  $z = z_{1-\alpha/2}$  wegen  $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$

$$P\left(\left|\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leq z_{1-\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha.$$

Da die Diskriminante der zur nachstehenden quadratischen Ungleichung gehörigen quadratischen Gleichung gleich

$$\left(\hat{p}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2n}\right)^2 - \left(1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right)\hat{p}_n^2 = \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4n})$$

ist, gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \leq z_{1-\alpha/2} &\iff (\hat{p}_n - p)^2 \leq z_{1-\alpha/2}^2 \frac{p(1-p)}{n} \\ &\iff p^2\left(1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}\right) - 2p\left(\hat{p}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2n}\right) + \hat{p}_n^2 \leq 0 \\ &\iff p \in [p_n^-, p_n^+]. \end{aligned}$$

Dabei sind

$$p_n^\pm = \frac{1}{1 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}}\left(\hat{p}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2n} \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4n}}\right)$$

---

<sup>2</sup>Eine schulrelevante Darstellung der Normalapproximation der Binomialverteilung findet sich in den Abschnitten 3 und 4 von [17]. Hinsichtlich der Normalapproximation der Hypergeometrischen Verteilung sei auf [19] verwiesen.

die beiden Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung.

Daher ist  $[p_n^-, p_n^+]$  ein  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -iges Näherungskonfidenzintervall für  $p$ , welches wir - entsprechend der angelsächsischen Bezeichnung - *Score-Konfidenzintervall*<sup>3</sup> nennen.

Da  $n$  groß im Verhältnis zu  $z_{1-\alpha/2}^2$  ist - andernfalls hätte die Normalapproximation nicht verwendet werden dürfen - wird in der Praxis  $z_{1-\alpha/2}^2/n$  zumeist vernachlässigt. Dementsprechend erhält man für die Endpunkte  $p_n^\pm$  des obigen Konfidenzintervalls folgende Approximationen

$$\hat{p}_n^\pm = \hat{p}_n \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}.$$

Das in der Praxis zumeist verwendete, sogenannte *Wald'sche Näherungskonfidenzintervall*<sup>4</sup> für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $p$  ist daher

$$\left[ \hat{p}_n - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}, \hat{p}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)} \right].$$

**Anmerkung 1:** Seien  $\alpha$  und  $n$  fest und  $z = z_{1-\alpha/2}$ . Dann genügen die Endpunkte der Score-Konfidenzintervalle  $[p_n^-, p_n^+]$ , welche lediglich vom Schätzer  $\hat{p}_n \in [0, 1]$  abhängen, der Gleichung

$$(\hat{p}_n - p)^2 = \frac{z^2}{n} p(1 - p).$$

Der geometrische Ort aller Punkte, die dieser Gleichung genügen, ist eine Ellipse, welche wir für unseren Zweck *Score-Ellipse* nennen wollen. Die Endpunkte der Wald'schen Näherungskonfidenzintervalle genügen der Gleichung

$$(\hat{p}_n - p)^2 = \frac{z^2}{n} \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n).$$

---

<sup>3</sup>Mit seinem Score-Konfidenzintervall hat der US-amerikanische Statistiker *Edwin B. Wilson* (1879 – 1964) im Jahre 1927 die insbesondere durch *Jerzy Neyman* vorangetriebene Arbeit über Konfidenzintervalle eingeleitet.

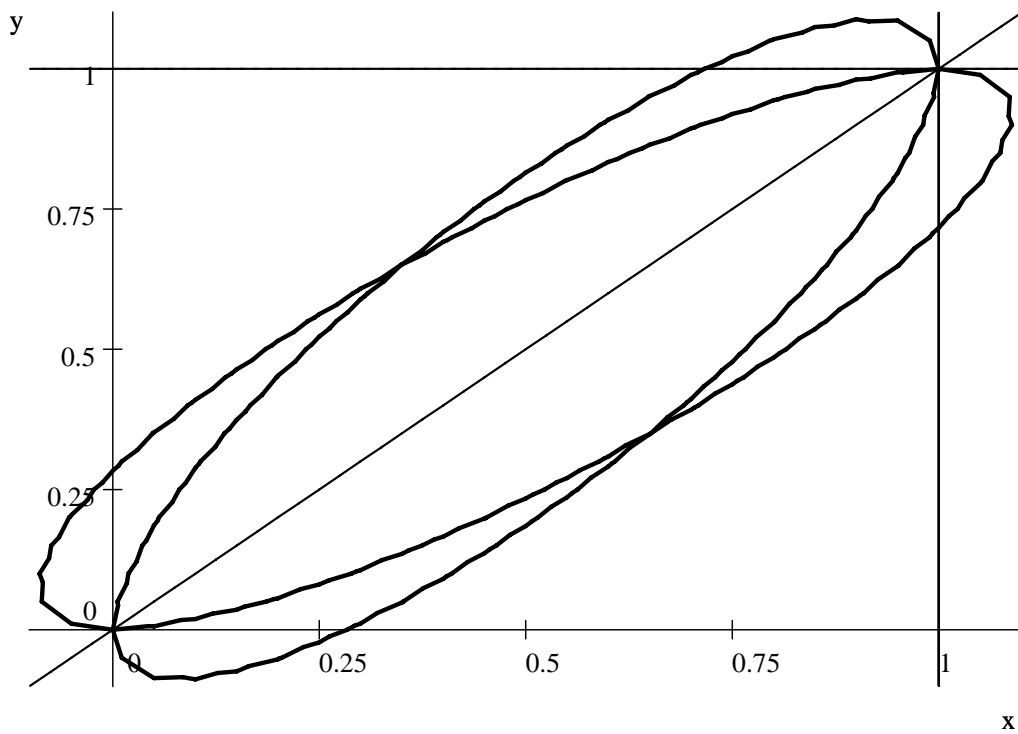
<sup>4</sup>Dieses Näherungskonfidenzintervall wurde im Jahre 1943 von *Abraham Wald* (1902 – 1950) vorgeschlagen. Der aus Klausenburg (Kolozsvár, Cluj) im heutigen Rumänien stammende Statistiker war von 1933 – 1938 an dem damals von *Oskar Morgenstern* geleiteten Österreichischen Institut für Konjunkturforschung in Wien beschäftigt. Nach seiner Flucht in die U.S.A. war er im Zusammenhang mit der Qualitätssicherung bei der Waffenproduktion maßgeblich daran beteiligt, die sequentielle Statistik zu entwickeln.

Der geometrische Ort aller Punkte, die dieser Gleichung genügen, ist ebenfalls eine Ellipse. Wir nennen sie *Wald'sche Ellipse*. Score-Ellipse und Wald'sche Ellipse haben - dem Umstand entsprechend, dass bei ihnen die Rollen von  $p$  und  $\hat{p}_n$  vertauscht sind - folgende gemeinsamen Eigenschaften:

- sie haben den Mittelpunkt  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und
- beinhalten die Punkte  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ .

Ihre Tangenten in den beiden Punkte  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  sind jedoch

- im Fall der Score-Ellipse parallel zur Ordinate und
- im Fall der Wald'schen Ellipse parallel zur Abszisse.



**Abbildung:** Score-Ellipse und Wald'sche Ellipse für  $z = 2$  und  $n = 10$

### 2.1.2 Folgerungen aus der konkreten Gestalt des Näherungskonfidenzintervalls

Aus der konkreten Gestalt des Näherungskonfidenzintervalls lassen sich folgende Sachverhalte ablesen.

- a) Lage und Länge des Konfidenzintervalls hängen vom Zufall ab.
- b) Die Länge des Konfidenzintervalls ist das Doppelte des sogenannten *Fehlers*<sup>5</sup>

$$\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}.$$

Dieser hängt ab

b1) via  $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(\frac{1}{2} + \frac{1-\alpha}{2})$  von der vorgegebenen statistischen Sicherheit  $1 - \alpha$ .

b2) via  $1/\sqrt{n}$  vom Stichprobenumfang und

b3) via  $\sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}$  vom Schätzwert  $\hat{p}_n$ .

Zu b1) Da  $\beta \mapsto \Phi^{-1}(\beta)$  eine streng monoton wachsende Funktion ist, wächst  $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(\frac{1}{2} + \frac{1-\alpha}{2})$  mit der statistischen Sicherheit. Für die klassischen Werte  $\alpha$  gelten beispielsweise

$\alpha$	$(1 - \alpha) 100\%$	$z_{1-\alpha/2}$
0.1	90 %	1.645
0.05	95 %	1.960
0.01	99 %	2.576

Zu b2) Will man beispielsweise bei gleicher statistischer Sicherheit und gleichem Schätzwert  $\hat{p}_n$  die Länge des Konfidenzintervalls halbieren, so muss man den Stichprobenumfang vervierfachen.

Zu b3) Da sich die Ungleichung

$$\sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)} \leq \frac{\hat{p}_n + 1 - \hat{p}_n}{2} (= \frac{1}{2})$$

zwischen dem geometrischen Mittel  $\sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}$  und dem arithmetischen Mittel  $\frac{1}{2}$  an einem Thaleskreis mit Mittelpunkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  und Radius  $r =$

---

<sup>5</sup>Der durch  $\pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}$  beschriebene Bereich wird in der angelsächsischen Literatur *margin of error* genannt.

$\frac{1}{2}$  veranschaulichen lässt, ist  $y = \sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}$  die positive Lösung der zugehörigen Kreisgleichung

$$\left(\hat{p}_n - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad (*)$$

Demgemäß verhält sich die Länge des Konfidenzintervalls. Sie ist also für  $\hat{p}_n \cong \frac{1}{2}$  groß und für  $\hat{p}_n \cong 0$  oder  $\hat{p}_n \cong 1$  verschwindend klein.

### 2.1.3 Anmerkungen zur Versuchsplanung

Bei der Versuchsplanung hat der Statistiker in Zusammenarbeit mit dem Fachwissenschaftler bzw. in Verhandlung mit dem Auftraggeber einer Umfrage 1. die statistische Sicherheit  $1 - \alpha$  und 2. den Stichprobenumfang  $n$  festzulegen.

Im Fall, dass man auf Resultate von einschlägigen Voruntersuchungen oder auf Ergebnisse vergleichbarer Studien zurückgreifen kann, kann unter Umständen der Stichprobenumfang beträchtlich verringert oder die statistische Sicherheit erhöht werden.

Für Beratungen bei der Versuchsplanung ist bekanntlich die Bedingung

$$P(|\hat{p}_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

entscheidend. Bei vorgegebenen  $\varepsilon$  und  $\alpha$  erhält man nach Anwendung der Normalapproximation den Stichprobenumfang  $n$  gemäß

$$\begin{aligned} \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} \leq \varepsilon &\iff n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 p(1-p) \\ &\cong \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot c \quad \text{mit } c \in (0, 1/4], \end{aligned}$$

wobei

$$c = 1/4 \quad \text{oder} \quad c = p_0(1 - p_0) \quad \text{mit} \quad 0 < p_0 < \frac{1}{2}$$

je nachdem, ob es keine Vorinformation hinsichtlich  $p$  gibt oder ob aufgrund von Vorinformationen mit gutem Grund angenommen werden kann, dass  $p \in (0, p_0) \cup (1 - p_0, 1)$  ist.

### 2.1.4 Angabe der Parametermenge, für welche die Normalapproximation gerechtfertigt ist

Nach Abschätzung des Stichprobenumfangs lässt sich schließlich jene Menge der Parameter  $p \in (0, 1)$  angeben, für welche die Normalapproximation der Binomialverteilung angebracht ist. Dies geschieht mit Hilfe der Faustregel

$$np(1-p) \geq 9$$

und der Darstellung von  $y^2 = p(1-p)$  in der zu Punkt b3) angeführten Kreisgleichung. Demgemäß ist die Anwendung der Normalapproximation für alle  $p \in (0, 1)$  gerechtfertigt, welche

$$\left| p - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{36}{n}}$$

erfüllen. (Damit diese Menge nicht leer ist, ist stets von einem Stichprobenumfang  $n > 36$  auszugehen.)

### 2.1.5 Durchführung eines Urnenversuchs und Interpretation

Ein Konfidenzintervall ist - wie gesagt - so konstruiert, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Konfidenzintervall den wahren Parameter  $p$  überdeckt, (ungefähr)  $1 - \alpha$  ist.

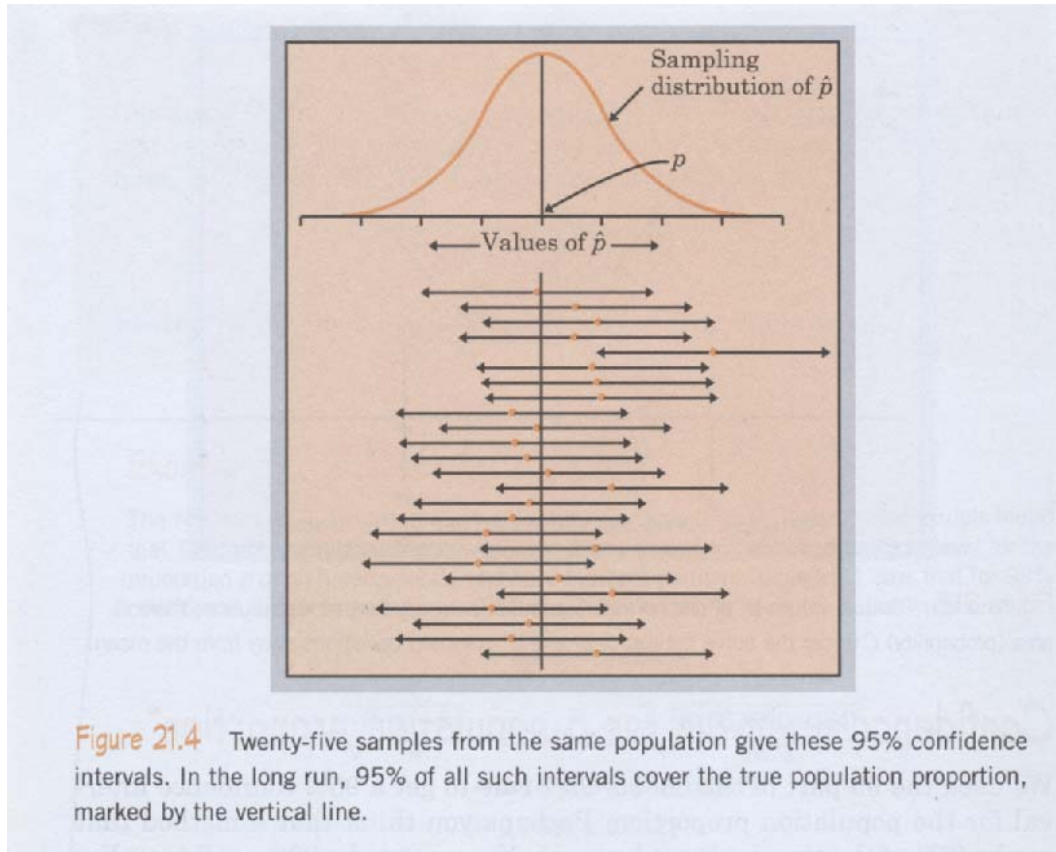
Ein gutes Verständnis für die Wirkungsweise von Konfidenzintervallen vermittelt etwa folgender Urnenversuch, für den wir  $\alpha = 0.05$  wählen.

Eine Urne enthalte 100 Kugeln, von denen  $s \in [35, 65]$  schwarz und  $w = 100 - s$  weiss sind. (Von der Farbe abgesehen seien die Kugeln ununterscheidbar.) Eine Stichprobe bestehe darin, der Urne  $n = 40$  Kugeln zufällig und mit Zurücklegen zu entnehmen.

Wir ziehen 20 solcher Stichproben und ermitteln für jede das zugehörige Konfidenzintervall für den Anteil  $p = \frac{s}{100}$  der schwarzen Kugeln in der Urne. Wegen  $1 - \alpha = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$  ist zu erwarten, dass 19 der 20 Konfidenzintervalle den Anteil  $p$  überdecken.

Ein solcher Versuch ist unter "Kurze Einführung in die Praxis und Theorie der Stichproben in Form eines Gesprächs" in [9] dokumentiert.

Die nachstehende Illustration ist Chapter 21: *What is a Confidence Interval?* in [5] entnommen.



## 2.2 Konfidenzintervalle für Anteilswerte

Da im Fall des Ziehens ohne Zurücklegen  $S_n$  gemäß der Hypergeometrischen Verteilung  $H_{n,N,s}$  verteilt ist, ist unter der Annahme, dass  $n$  und  $N$  ( $\geq n$ ) hinreichend groß sind, die Normalapproximation der Hypergeometrischen Verteilung zu berücksichtigen. Der Umstand, dass deren Varianz aus der der zugehörigen Binomialverteilung durch Multiplikation mit dem Faktor  $1 -$

$\frac{n-1}{N-1} < 1$  hervorgeht, schlägt sich im Wald'sche Näherungskonfidenzintervall

$$\left[ \hat{p}_n - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}, \hat{p}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \right]$$

für den Anteilswert  $\frac{s}{N}$  dadurch nieder, dass der Schätzer für die Standardabweichung mit der Quadratwurzel aus  $1 - \frac{n}{N}$  multipliziert wird. Diese Näherung von  $1 - \frac{n-1}{N-1}$  nennt man übrigens *Endlichkeitskorrektur*.

Die Verringerung der Varianz bewirkt - wie aus dem Folgenden ersichtlich ist - auch eine Verringerung des Stichprobenumfangs.

$$\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \leq \varepsilon \iff n \geq c \left( \frac{z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2 \left[ \frac{1}{1 + \frac{c}{N} \left( \frac{z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2} \right] \\ (\leq c \left( \frac{z_{1-\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2).$$

Diese fällt jedoch umso geringer aus, je größer  $N$  ist. Bei Meinungsumfragen aus einer sehr großen Grundgesamtheit fällt diese Verringerung nicht ins Gewicht, sodass eine Umfrage unter den Wahlberechtigten im Bundesland Salzburg kaum billiger als eine solche in den USA ist.

**Anmerkung 2:** In der Markt- und Meinungsforschung bedient man sich üblicherweise keiner Zufallsstichprobe sondern einer sogenannten *Quoten-* oder *Anteilstichprobe*. Für eine solche wird die Bevölkerung nach zweckmäßigen Merkmalen wie Geschlecht, Altersgruppe und Wohngebiet (Regionen, Landgemeinden, Klein- Mittel- und Großstädten) in *Schichten*<sup>6</sup> eingeteilt. Die aus der amtlichen Statistik bekannten Anteile  $N_j/N$  dieser Schichten werden in der Stichprobe proportional nachgebildet, sodass bei einer Stichprobe von insgesamt  $n$  Befragten die Stichprobenumfänge  $n_j \cong n \cdot \frac{N_j}{N}$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , auf die einzelnen Schichten entfallen. Bezeichnet  $\hat{p}_{n_j}$  den für die Schichte  $j$  ermittelten Schätzer, dann ist

$$\hat{p}_n = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} \cdot \hat{p}_{n_j}$$

der *Schätzer der Anteilstichprobe*. Im namentlich in der amtlichen Statistik bevorzugten Idealfall wird innerhalb jeder Schicht eine Zufallsstichprobe

---

<sup>6</sup>*Schichten (strata)* sind Teilgesamtheiten der Grundgesamtheit, die einander ausschließen und zusammen die Grundgesamtheit ergeben.



durchgeführt. Hinsichtlich der in der Markt- und Meinungsforschung geübten Praxis bei der Durchführung des Quotenverfahrens sei beispielsweise auf [7], Seite 97 ff verwiesen.

**Anmerkung 3:** Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Nutzung der Normalapproximation für die Ermittlung von Konfidenzintervallen für Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerten zwar zweckmäßig, jedoch nicht unabdingbar ist. Tatsächlich lassen sich auch sogenannte *exakte Konfidenzintervalle* konstruieren. So sind beispielsweise die exakten Konfidenzintervalle mit  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -iger statistischer Sicherheit für die Extremfälle

$$\hat{p}_n = 0 \quad \text{und} \quad \hat{p}_n = 1$$

die Intervalle

$$[0, 1 - \sqrt[n]{\alpha}] \quad \text{bzw.} \quad [\sqrt[n]{\alpha}, 1].$$

Hinsichtlich einer Begründung und näherer Informationen hierzu sei auf die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 1.3.1 von [11] verwiesen.

## 2.3 Geometrie des Score-Konfidenzintervalls

Sei  $c = \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{n}$ . Der Ausgangspunkt für die Ermittlung des Score-Konfidenzintervalls war die Beziehung

$$(p - \hat{p}_n)^2 = c \cdot p(1 - p)$$

(vgl. Anmerkung 1 in Abschnitt 2.1.1) bzw. im Hinblick auf (\*)

$$(p - \hat{p}_n)^2 + c(p - \frac{1}{2})^2 - \frac{c}{4} = 0.$$

Für  $x := p - \frac{1}{2}$  und  $y := \hat{p}_n - \frac{1}{2}$  ergibt sich daraus die Gleichung

$$y^2 - 2xy + (1 + c)x^2 - \frac{c}{4} = 0, \tag{0}$$

wobei wir im Weiteren stets  $c \in (0, 2]$  annehmen, was für unsere Anwendung keine Einschränkung darstellt, zumal typischerweise bereits  $z_{1-\alpha/2}^2 \leq 2$  ist und im Hinblick auf die Anwendbarkeit der Normalapproximation zumindest  $n > 36$  verlangt ist.

Zumal die Diskriminante  $D$  der quadratischen Gleichung (0) bezüglich  $y$

$$D = x^2 - \left( (1+c)x^2 - \frac{c}{4} \right) = \frac{c}{4}(1 - (2x)^2)$$

ist, sind die beiden Lösungen

$$y(x) = x \pm \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{1 - (2x)^2}. \quad (1)$$

Wir betrachten den oberen Teil der Ellipse und daher die Lösung (1) mit dem  $+$ -Zeichen, kurz:  $(1_+)$ . Die zugehörige Ableitung ist

$$y'(x) = 1 - \frac{2x\sqrt{c}}{\sqrt{1 - (2x)^2}}. \quad (2)$$

Zunächst ermitteln wir die Koordinaten  $(x_1, y_1)$  des rechten Hauptscheitels und des oberen Nebenscheitels  $(x_2, y_2)$ . Das sind jene Punkte  $(x, y)$ , welche der Gleichung  $(1_+)$  genügen und für welche der Vektor der Tangente und der Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  aufeinander senkrecht stehen, d.h. dass der jeweilige Anstieg der Tangente der Gleichung

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

genügt. Multiplikation dieser Gleichung mit  $y(x)$  und Einsetzen von  $(1_+)$  und (2) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= x + \left( x + \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{1 - (2x)^2} \right) \left( 1 - \frac{2x\sqrt{c}}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \right) \\ &= 2\left(1 - \frac{c}{2}\right)x + \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{1 - (2x)^2} - \frac{2x^2\sqrt{c}}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \\ &= \left(1 - \frac{c}{2}\right)2x + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \left( \frac{1}{2} - (2x)^2 \right) \end{aligned}$$

bzw., gleichbedeutend,

$$\left(1 - \frac{c}{2}\right)2x\sqrt{1 - (2x)^2} = \sqrt{c}\left((2x)^2 - \frac{1}{2}\right), \quad (3)$$

wobei  $x > 0$  oder  $x < 0$  sein kann. Quadriert man die Beziehung (3), so erhält man mittels Substitution von  $u := (2x)^2$

$$\left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 u (1 - u) = c \left(u - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Wegen (\*) ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} 0 &= c \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 u (1 - u) \\ &= c \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(1 - c/2\right)^2}{4\left(1 + (c/2)^2\right)}$$

bzw. im Hinblick auf (3) und  $2 - c \geq 0$

$$u = (2x)^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1 - c/2}{\sqrt{1 + (c/2)^2}}\right)$$

oder

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{1 \pm \frac{1 - c/2}{\sqrt{1 + (c/2)^2}}},$$

wobei die Vorzeichen gekoppelt sind.

**Anmerkung 4:** Wegen  $1 + (c/2)^2 - (1 - c/2)^2 = c > 0$  gilt tatsächlich

$$\frac{1 - c/2}{\sqrt{1 + (c/2)^2}} < 1,$$

sodass beide Lösungen reell sind.

Wegen

$$1 - (2x_{1,2})^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1 - c/2}{\sqrt{1 + (c/2)^2}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1 - c/2}{\sqrt{1 + (c/2)^2}}\right)$$

sind die zugehörigen  $y$ -Koordinaten

$$y_{1,2} = x_{1,2} + \frac{\sqrt{c}}{2} \sqrt{1 - (2x_{1,2})^2}.$$

## 20KAPITEL 2. KONFIDENZINTERVALLE FÜR WAHRSCHEINLICHKEITEN UND ANTI

Damit haben wir - im Prinzip - die Koordinaten des rechten Hauptscheitels  $(x_1, y_1)$  und des oberen Nebenscheitels  $(x_2, y_2)$  ermittelt.

Die Anstiege der beiden Achsen sind daher

$$\begin{aligned}
 k_{1,2}(c) &= \frac{y_{1,2}}{x_{1,2}} = 1 + \frac{\sqrt{c}}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1 \mp \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}})}}{\pm \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{1 \pm \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}}} = 1 \pm \sqrt{c} \frac{1 \mp \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}}{\sqrt{(1 \pm \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}})(1 \mp \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}})}} \\
 &= 1 \pm \sqrt{c} \frac{1 \mp \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}}{\sqrt{1 - \frac{(1-c/2)^2}{1+(c/2)^2}}} = 1 \pm \sqrt{c} \frac{1 \mp \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}}{\sqrt{\frac{c}{1+(c/2)^2}}} = 1 \pm \left( \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \mp \left(1 - \frac{c}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{c}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Das Vierfache des Quadrats der Längen von Haupt- und Nebenachse ist also

$$\begin{aligned}
 (2x_{1,2})^2 + (2y_{1,2})^2 &= (2x_{1,2})^2(1 + k_{1,2}^2(c)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}\right) \left(1 + \left(\frac{c}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}\right) \left(2\left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) \pm 2\frac{c}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right) \\
 &= \left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) \left(1 \pm \frac{1-c/2}{\sqrt{1+(c/2)^2}}\right) \left(1 \pm \frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}\right) \\
 &= \left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+(c/2)^2}} + \frac{(1-\frac{c}{2})\frac{c}{2}}{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right) \\
 &= \left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) \left(\frac{1 + \frac{c}{2}}{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \pm \frac{1}{\sqrt{1+(c/2)^2}}\right) \\
 &= 1 + \frac{c}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2},
 \end{aligned}$$

die Längen von Haupt- und Nebenachse somit

$$a(c) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{c}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}} \quad \text{und} \quad b(c) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{c}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}.$$

**Hauptachsentransformation:** Wie man sich unschwer überzeugen kann, gilt für den Cosinus des zugehörigen Winkels  $\alpha = \arctan(k_1(c))$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{1 + (\frac{c}{2})^2}}}.$$

Die lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

welche eine Drehung der Ellipse um den Winkel  $\alpha$  im Uhrzeigersinn bewerkstelligt, ergibt - nach einiger Rechnung - die Gleichung der durch (0) gegebenen Ellipse in Hauptachsenform

$$\frac{x_0^2}{a^2(c)} + \frac{y_0^2}{b^2(c)} = 1.$$

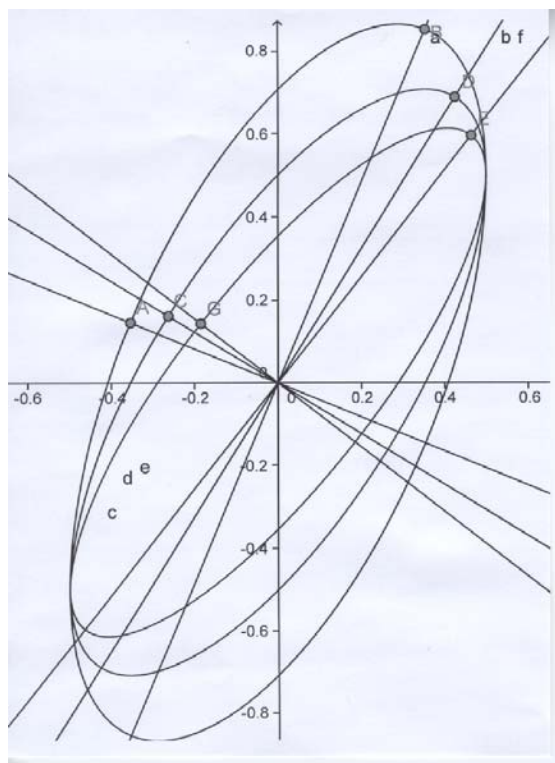


Abbildung zur Score-Ellipse: Erstellt mittels GeoGebra

## 2.4 Vergleich des Score-Konfidenzintervalls mit dem Wald'schen Approximationsintervall

Seien  $\alpha_n = (1 + \frac{z^2}{n})^{-1}$  und  $z = z_{1-\alpha/2}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann ist der Mittelpunkt des Score-Konfidenzintervalls gemäß

$$\tilde{p}_n = \frac{p_n^+ + p_n^-}{2} = \alpha_n \cdot \hat{p}_n + (1 - \alpha_n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\hat{p}_n + z^2/2n}{1 + z^2/n}.$$

ein gewichtetes Mittel aus  $\hat{p}_n$  und  $\frac{1}{2}$  und es gilt

$$\frac{1}{2} - \tilde{p}_n = \alpha_n \left( \frac{1}{2} - \hat{p}_n \right). \quad (4)$$

Das bedeutet, dass die Lage des Wald'schen Approximationsintervalls im Vergleich zu der des Score-Intervalls zu den Rändern 0 und 1 hin verschoben ist. In der Tat ist es nur dann zur Gänze im Intervall  $[0, 1]$  enthalten, wenn gilt

$$\hat{p}_n \in [1 - \alpha_n, \alpha_n].$$

Die Länge  $\frac{2z}{\sqrt{n}} \alpha_n \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n) + \frac{1}{4} \frac{z^2}{n}}$  des Score-Intervalls ist genau dann größer als die des Wald'schen Approximationsintervalls, nämlich  $\frac{2z}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_n (1 - \hat{p}_n)}$ , wenn gilt

$$\left| \hat{p}_n - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 + z^2/n}}.$$

(Dies trifft insbesondere für die Extremfälle  $\hat{p}_n = 0$  und  $\hat{p}_n = 1$  zu, für welche sich das Wald'sche Approximationsintervall auf je einen Punkt reduziert.)

Aus den beiden genannten Gründen ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit des Wald'schen Approximationsintervalls für  $p$  nahe 0 oder 1 und kleine  $n$  deutlich kleiner als der Sollwert  $1 - \alpha$ .

Abschließend bieten wir eine zukunftssträchtige Verbesserung des Score-Intervalls

## 2.4. VERGLEICH DES SCORE-KONFIDENZINTERVALLS MIT DEM WALD'SCHEN APPROXIM

an. Wegen (\*) und (4) ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tilde{p}_n\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} - \alpha_n^2 \left(\frac{1}{2} - \hat{p}_n\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} (1 - \alpha_n^2) + \alpha_n^2 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \hat{p}_n\right)^2\right) \\
 &= \alpha_n^2 \hat{p}_n (1 - \hat{p}_n) + \frac{1}{4} (1 - \alpha_n^2) .
 \end{aligned}$$

Also gilt für das  $n/(2z)^2$ -Fache des Quadrats der Länge des Score-Konfidenzintervalls

$$\begin{aligned}
 \alpha_n^2 \left(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) + \frac{1}{4} \frac{z^2}{n}\right) &= \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - \frac{1}{4} (1 - \alpha_n^2 (1 + \frac{z^2}{n})) \\
 &= \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - \frac{1}{4} (1 - \alpha_n) \\
 &= \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - \frac{1}{4(n/z^2 + 1)} \\
 &\leq \frac{n}{n + z^2} \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) ,
 \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung wegen

$$\begin{aligned}
 \Delta &= n \cdot \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - (n + z^2) \left(\tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - \frac{z^2}{4(n + z^2)}\right) \\
 &= z^2 \left(\frac{1}{4} - \tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n)\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

gilt. Daher hat das Score-Konfidenzintervall in Abhängigkeit von  $\tilde{p}_n$  die Form

$$p_n^\pm = \tilde{p}_n \pm \frac{z}{\sqrt{n}} \sqrt{\tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n) - \frac{1}{4(n/z^2 + 1)}} ,$$

wobei die Approximation

$$\tilde{p}_n^\pm \cong \tilde{p}_n \pm z \sqrt{\frac{\tilde{p}_n(1 - \tilde{p}_n)}{n + z^2}} ,$$

welche ähnlich handlich wie die Wald'sche ist, im Unterschied zu dieser jedoch die Überdeckungswahrscheinlichkeit auch für kleine  $n$  geringfügig erhöht (vgl. [8]). Dieser Vorteil der letztgenannten Approximation führt dazu, dass sie die Wald'sche Approximation in jüngster Zeit zu ersetzen beginnt.





# Kapitel 3

## Konfidenzintervalle für den Erwartungswert der Normalverteilung

### 3.1 Bekannte Varianz

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, wobei  $\mu$  unbekannt und  $\sigma^2$  bekannt ist. Dann ist

$$T_{\bar{X}}(\mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$N(0, 1)$ -verteilt. Sei weiters  $0 < \alpha \ll 1$  und  $z_\beta = \Phi^{-1}(\beta)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ . Dann gilt

$$P_\mu^n(z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

und wegen  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$

$$\{z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\} = \{\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\}.$$

Somit hat das Intervall

$$\left[ \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2} \right] \quad (1)$$

die Eigenschaft, dass es mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  den unbekanntem Parameter  $\mu$  überdeckt. Man spricht von einem *Konfidenzintervall mit  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -iger statistischer Sicherheit*.

Dass ein Konfidenzintervall keineswegs eindeutig ist, wird durch folgende Modifikation des Obigen illustriert.

Zusätzlich zu den genannten Voraussetzungen sei  $\gamma \in [0, 1]$ . Dann ist wegen

$$P_{\mu}^n(z_{\alpha \cdot (1-\gamma)} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha \cdot \gamma}) = 1 - \alpha$$

$z_{\beta} = -z_{1-\beta}$  und somit

$$\{z_{\alpha \cdot (1-\gamma)} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha \cdot \gamma}\} = \{\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha \cdot \gamma} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha \cdot (1-\gamma)}\}.$$

Daher ist

$$[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha \cdot \gamma}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha \cdot (1-\gamma)}]$$

für jedes feste  $\gamma \in [0, 1]$  ein Konfidenzintervall mit  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -iger statistischer Sicherheit. Bemerkenswert ist auch, dass alle diese Konfidenzintervalle zwar zufällige Lage, jedoch feste Länge besitzen.

Die Länge

$$l_{\alpha}(\gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{1-\alpha \cdot (1-\gamma)} + z_{1-\alpha \cdot \gamma}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{1-\alpha/2 + \alpha(\gamma-1/2)} + z_{1-\alpha/2 + \alpha(1/2-\gamma)})$$

dieses Konfidenzintervalls ist aufgrund der Symmetrie der Dichte der  $N(0, 1)$ -Verteilung offensichtlich genau dann minimal, wenn  $\gamma = 1/2$  ist.

## 3.2 Unbekannte Varianz

Für den realistischeren Fall, dass die Varianz  $\sigma^2$  unbekannt ist, wird diese durch den zugehörigen erwartungstreuen Schätzer

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

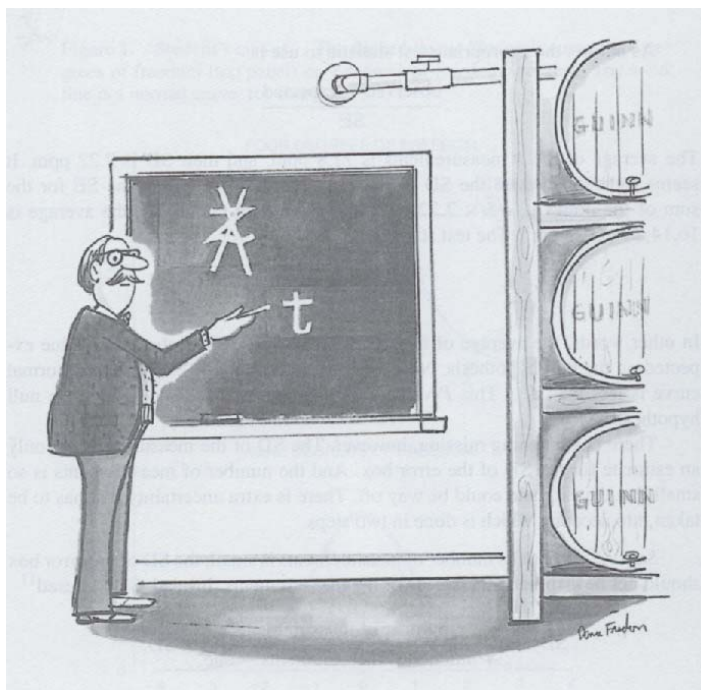
geschätzt. Dementsprechend wird im Konfidenzintervall (1) die Standardabweichung  $\sigma$  durch deren Schätzer  $S_n$  und darüber hinaus das  $(1 - \alpha/2)$ -Quantil  $z_{1-\alpha/2}$  der Normalverteilung durch das etwas größere  $(1 - \alpha/2)$ -Quantil  $t_{n-1,1-\alpha/2}$  der sogenannten *t-Verteilung* (oder *Student-Verteilung*<sup>1</sup>) mit  $n - 1$  Freiheitsgraden ersetzt: Dementsprechend ist das Konfidenzintervall

$$\left[ \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2} \right].$$

Hinsichtlich einer Herleitung sei etwa auf Chapter 7: "The Normal Distribution" verwiesen.

Wie die Quantile der Normalverteilung, so entnimmt man auch die der *t-Verteilung* entsprechenden Tabellen oder ermittelt sie mithilfe geeigneter Software.

Die folgende Abbildung ist [2], Chapter 26 entnommen.



<sup>1</sup>*Student* war das Pseudonym des englischen Statistikers *William Sealy Gosset* (1876–1937), der für die Brauerei Guinness arbeitete.



# Kapitel 4

## Abschließende Anmerkungen

### 4.1 Historisches

Die Beschäftigung mit Konfidenzintervallen ist, verglichen mit anderen mathematischen Teildisziplinen, die im Schulstoff Eingang gefunden haben, jungen Datums: Wesentliche Fortschritte in diesem Bereich wurden im Zeitraum 1925 – 1950 erzielt. Die beiden wichtigsten Voraussetzung hierfür waren:

- ein Abschluss der Diskussion über sogenannte *repräsentative Stichproben*, welche vorwiegend im Rahmen des *International Statistical Institut (ISI)* geführt wurde, und
- eine intensive internationale Zusammenarbeit des englischen Statistikers *Egon Sharpe Pearson* (1895 – 1980), Sohn von *Karl Pearson* (1857 – 1936), mit dem polnischen Statistiker *Jerzy Neyman* (1894 – 1981) über die Theorie des Testens statistischer Hypothesen<sup>1</sup>.

Weitere Statistiker, die maßgebliche Beiträge zu Theorie und Anwendung der Konfidenzintervalle geleistet haben sind: Der US-Amerikaner *Edwin B. Wilson* (1879 – 1964), der Brite *Ronald Aylmer Fisher* (1890 – 1962), der US-Amerikaner *Harold Hotelling* (1895 – 1973) und *Abraham Wald* (1902 – 1950), ein Bürger der österreich-ungarischen Monarchie.

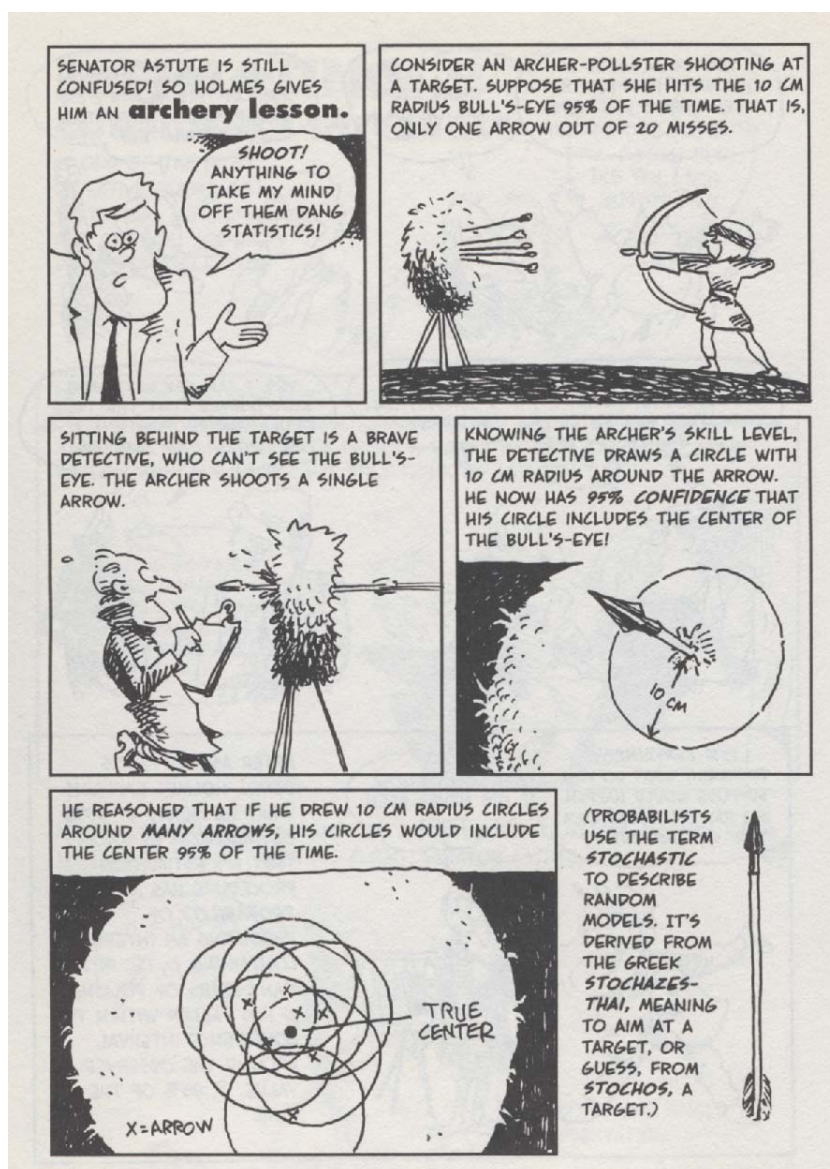
Hinsichtlich weiterer Informationen zur Geschichte der Konfidenzintervalle und der *Demoskopie*, welche wesentlich mit den Namen *George Horace Gallup* (1901 – 1984) und *Elisabeth Noelle-Neumann* (1916 –) verbunden ist, sei auf [18] verwiesen.

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung *confidence interval* ist übrigens eine Übersetzung der polnischen Bezeichnung *predzial ufno'si*.

## 4.2 Cartoon

Auf die Metapher *Zielschießen* für *Schätzen von Parametern* sind wir bereits in der Einleitung meines Beitrags "Der Salzburger Jedermannlauf oder: Die Anwendung der Statistik für Spionagezwecke" [15] eingegangen. Der nachstehende Cartoon zum Thema "Estimation with Confidence" stammt aus [3].



# Literaturverzeichnis

## [1] Bücher

- [2] *Freedman, D., Pisani, R. and R. Purves*: Statistics. Norton & Co., New York 2007
- [3] *Gonick, L. and W. Smith*: The Cartoon Guide to Statistics. Harper-Perennial, New York 1993
- [4] *Larsen, R.J. and M.L. Marx*: An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2006
- [5] *Moore, D.S.*: Statistics: Concepts and Controversies. W.H. Freeman & Co., New York 2001
- [6] *Moore, D.S. and G.P. McCabe*: Introduction to the Practice of Statistics. W.H. Freeman & Co., New York 2004
- [7] *Noelle-Neumann, E.*: Umfragen in der Massengesellschaft: Einführung in die Methoden der Demoskopie. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg 1963

## Zeitschriften

- [8] *Agresti, A. and B.A. Coull*: Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions. The American Statistician 52 (1998), 119 – 126

**Skripten**

- [9] *Österreicher, F.*: Ausgewählte Kapitel der Statistik. LV-Unterlagen, Salzburg 1986
- [10] *Österreicher, F.*: Skriptum zur Lehrveranstaltung Statistik für Lehramt. Salzburg 2007 \*)
- [11] *Österreicher, F.*: Skriptum zur Lehrveranstaltung Mathematische Statistik, Salzburg 2008 \*)

**Seminarunterlagen**

- [12] *Österreicher, F.*: Schätzen des Umfangs von Populationen. Fortbildungsseminar, Meran 1990
- [13] *Österreicher, F.* und *M. Weiß*: Unterlagen zum Stochastikseminar: Teil 1, Salzburg 2007 \*)
- [14] *Österreicher, F.* und *M. Weiß*: Unterlagen zum Stochastikseminar: Teil 2, Salzburg 2007 \*)

**Unterlagen zur Lehrer/innen/fortbildung**

- [15] *Österreicher, F.*: Der Salzburger Jedermannlauf oder: Die Anwendung der Statistik für Spionagezwecke. Lehrer/innen/fortbildungstag "West", Innsbruck 2008 \*)
- [16] *Österreicher, F.*: Analyse zweidimensionaler Daten: Regression und Korrelation. Lehrer/innen/fortbildungstag "West", Salzburg 2009 \*)

\*) verfügbar unter "<http://www.uni-salzburg.at>" > Fakultäten und Fachbereiche > Naturwissenschaftliche Fakultät > Fachbereich Mathematik > Personen > Dozenten >

**Diplom-, Magister- und Masterarbeiten**

- [17] *Weiß, M.*: Binomialverteilung und Normalapproximation: Grundlegendes und Hintergrundinformation für den Stochastikunterricht. Diplomarbeit, Salzburg 1995



- [18] *Guggenberger, A.*: Die Erfindung des Konfidenzintervalls und dessen frühe Anwendungen. Magisterarbeit, Salzburg 2006
- [19] *Müller, C.*: Normalapproximation der hypergeometrischen Verteilung. Masterarbeit, Salzburg 2008

