Aus Lambacher-Schweizer "Analytische Geometrie und lineare Algebra" 1.Auflage 2012 S.175

Satz 1: (Existenz einer Grenzmatrix)

P sei eine stochastische Matrix. Wenn es unter den Matrizen P, P^2, P^3, … eine Matrix mit mindestens einer Zeile gibt, in der alle Einträge positiv sind, dann besitzt der Austauschprozess eine stabile Verteilung g und eine Grenzmatrix G, deren Spalten alle gleich sind.

Satz 2: (Bestimmung von g und G)

P sie eine stochastische Matrix mit einer stabilen Verteilung g

a) Man kann g berechnen, indem man das LGS Pg = g löst und zusätzlich betrachtet, dass die Summe der Elemente von g der Vorgegebenen Gesamtzahl an Objekten entspricht.

b) Zur Bestimmung der Grenzmatrix G berechnet man zunächst einen Fixvektor, dessen Elemente die Summe 1 haben. Die Elemente der Spalten der Grenzmatrix G entsprechen den Elementen dieses Fixvektors.

https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Perron-Frobenius

Satz von Perron-Frobenius

Der **Satz von Perron-Frobenius** befasst sich mit der Existenz eines positiven Eigenvektors zu einem positiven, betragsgrößten Eigenwert von nichtnegativen Matrizen. Die Aussagen haben eine wichtige Bedeutung zum Beispiel für die Potenzmethode und Markow-Ketten

Satz:

Eine Stochastische Matrix besitzt immer einen Eigenvektor zum Eigenwert λ = 1

Beweis für n = 2

$T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $0 \le a,b,c,d \le 1$ und $a+c=1; b+d=1$

→ $T=\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$

Eigenwertgleichung:

$\det(\lambda E - T)=0 \iff \det\begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -(1-a) & \lambda-(1-b) \end{pmatrix}=0 \iff \lambda^2-(a-b+1)\lambda+a-b=0$

$\iff \lambda_{1/2}=\frac{a-b+1}{2}\pm\sqrt{\frac{((a-b)-1)^2}{4}}=\frac{a-b+1}{2}\pm\frac{|a-b-1|}{2}$ und weil $0 \le a \le 1$ und $b \ge 0$ ist, gilt $a-b-1 \le 0$

$\iff \lambda_{1/2}=\frac{a-b+1}{2}\pm\frac{1-a+b}{2}$

$\iff \begin{matrix} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=a-b \end{matrix}$

Damit ist wegen $a \le 1$ und $b \ge 0$ sogar gezeigt, dass $\lambda_1=1$ der größte Eigenwert ist.

Eigenvektoren zu λ = 1:

$T\cdot\vec{x}=\vec{x} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ a-1 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff (1-a)x_1-bx_2=0$

I. $b \ne 0 \Rightarrow x_2=\frac{1-a}{b}x_1 \Rightarrow \vec{x}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{b} \end{pmatrix}$ (für a = 1 absorbierend)

II. $b=0 \Rightarrow (1-a)x_1=0$

i. $a \ne 1 \Rightarrow x_1=0$; x_2 bel. $\Rightarrow \vec{x}=x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (absorbierend)

ii. $a=1 \Rightarrow T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T\cdot\vec{x}=\vec{x},\ \forall\vec{x}\in\mathbf{R}^2$

Anmerkung:

Die Existenz eines Eigenvektors zeigt noch nicht die Existenz einer Grenzmatrix.

z.B. $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine Grenzmatrix. aber den EV $\vec{x}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D.h. nicht jede Startverteilung strebt gegen den EV.

Dazu benötigt man noch die Positivitätsbedingung aus dem Satz von Perron-Frobenius

Für n = 3 ist

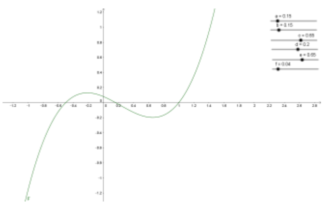
$$T=\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 1-a-b & 1-c-d & 1-e-f \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{l} 0\le a,b,c,d,e,f\le 0 \\ b\le 1-a \\ d\le 1-c \\ f\le 1-e \end{array}$$

damit wird $\det(\lambda E-T)=0$ zu:

$$\begin{array}{l} F(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2(e+f-a-d-1) \\ +\lambda(a+d+ad+be+cf-af-bc-de-e-f)+(af+bc+de-ad-be-cf)=0 \end{array}$$

Man sieht leicht, dass λ = 1 ein EW ist.

Im Schaubild mit Schiebereglern für a,…,f sieht man, dass λ = 1 immer der größte EW ist.



Das Bild ist ein Link.