Bestimmen von Konfidenzintervallen
Beispiel, Experiment:

Führen Sie folgende Zufallsexperimente durch:

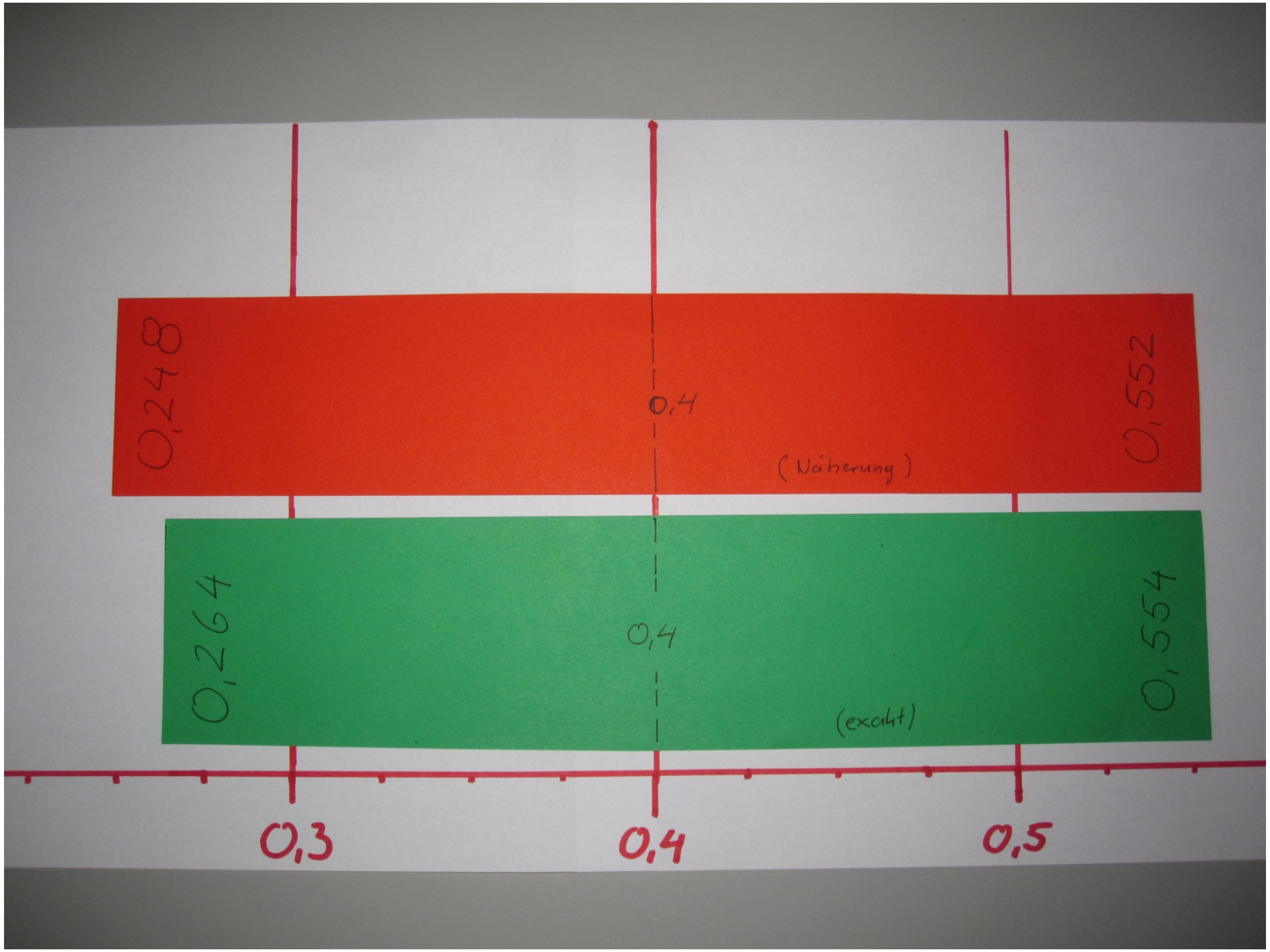
- Werfen Sie 40mal eine Münze.
  Ermitteln Sie wie oft „Kopf“ fällt
  (Anzahl der Treffer).

- Werfen Sie 40mal einen Reißnagel.
  Ermitteln Sie wie oft der Reißnagel
  auf der flachen Seite liegt
  (Anzahl der Treffer).

Aufgabe

- Geben Sie jeweils eine Punktschätzung und ein 95% Vertrauensintervall $[p_1 \; ; \; p_2]$ für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit an (exakt oder näherungsweise). → *Theorie (Anleitung)*
- Schneiden Sie einen Papierstreifen der Länge $p_2 - p_1$ aus ($0{,}1 \hat{=} 10 cm$). Notieren Sie p_1 und p_2 an den Rändern des Streifens und markieren Sie ihre Punktschätzung.
- Heften Sie ihren Streifen an das gemeinsame Koordinatensystem.

Konfidenzintervalle



Theorie (Anleitung)

Tritt bei einer Stichprobe der Größe n das beobachtete Merkmal s mal auf, dann ist die relative Häufigkeit

$$p_s = \frac{s}{n} = h_n$$

eine Punktschätzung für das unbekannte p.

Der so gefundene Schätzer entspricht aber wahrscheinlich nicht *exakt* dem *wahren, theoretischen* Wert p.

Theorie (Anleitung)

Beispiel: In einer Stichprobe von 40 haben 16 das Merkmal „Kopf“.
Schätzwert für das unbekannte p ist

$$p_s = \frac{16}{40} = h_n = 0{,}4$$

Ist das Merkmal (näherungsweise) normalverteilt, kann man zu jedem möglichen Wert von p einen Bereich angeben, in dem mit 95% Wahrscheinlichkeit die Stichprobe liegt. (1,96σ-Bereich).

Theorie (Anleitung)

Das **95%-Vertrauensintervall** für p
ist die Menge der möglichen Werte von p,
für die das beobachtete p_s im 1,96σ-Bereich von p liegt.

Beispiel: In einer Stichprobe von 40 haben 16 das Merkmal „Kopf". Es gilt unbekannte p gilt :

$$\mu = 40 \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{40 \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Gesucht sind alle Werte von p mit:

$$|16 - 40 \cdot p| \leq 1{,}96\sqrt{40 \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Theorie (Anleitung)

Wir teilen durch den Umfang der Stichprobe n=40:

$$|0,4-p| \le 1,96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{40}}$$

Die exakte Lösung der Ungleichung lautet:

$$0,4 = p+1,96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{40}} \Leftrightarrow p_1 = 0,2635$$

$$0,4 = p-1,96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{40}} \Leftrightarrow p_2 = 0,5540$$

Theorie (Anleitung)

Die genäherte Lösung mit $h_n = p_s = 0{,}4 \approx p$
lautet (vgl. auch Merkhilfe BW):

$$0{,}4 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot (1-0{,}4)}{40}} = p_2 = 0.5518$$

$$0{,}4 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot (1-0{,}4)}{40}} = p_1 = 0{,}2482$$

Ergebnis

Exakt: $p \in [0{,}2635\ ;\ 0{,}5540]$

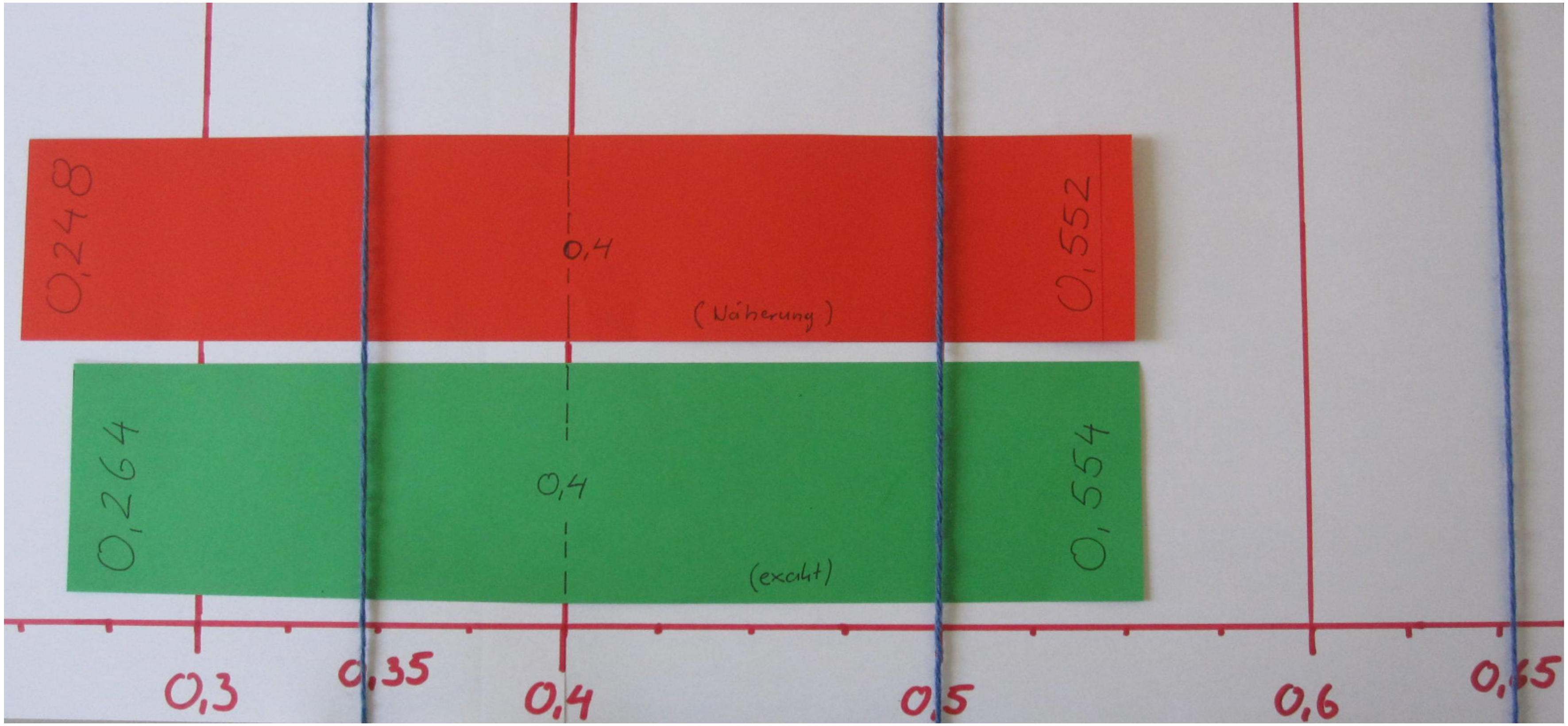
Das Intervall liegt **nicht** symmetrisch zu p_s !

Näherung: $p \in [0{,}2482\ ;\ 0{,}5518]$

Das Intervall liegt symmetrisch zu p_s !

Wie sind diese 95% Konfidenzintervalle zu *deuten*?
Erläuterung an den erstellten Papierstreifen…

Konfidenzintervalle



Im statistischen Mittel sollten 95% der ermittelten Konfidenzintervalle den „wahren, theoretischen“ Wert von p enthalten!