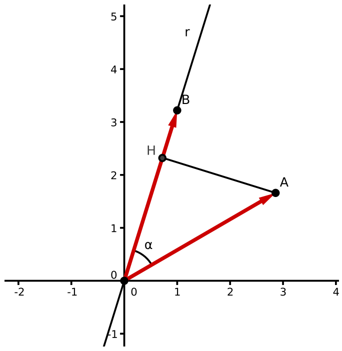
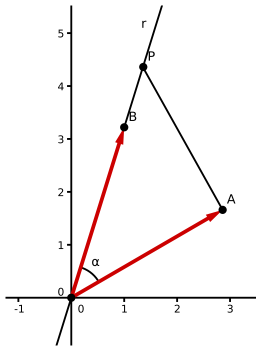
Vediamo un altro modo per introdurre il prodotto scalare tra vettori. Consideriamo per semplicità due vettori A e B di $\mathbb{R}^2$ di norma 1: $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $\| A \| = \| B \| = 1$. Indichiamo con α l'angolo formato dai due vettori. Consideriamo la retta r che contiene B e cerchiamo il punto di r che ha distanza minima da A.



Da un punto di vista geometrico sappiamo che il punto cercato è il punto H tale che $\overline{OH} = \| A \| \cdot \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$, quindi $H = \cos(\alpha)B$ (anche quest'ultima scrittura è possibile perché B ha norma 1).

Da un altro punto di vista, sappiamo che ogni punto di P di r è del tipo $P = tB = (tb_1, tb_2)$, quindi

$$\overline{PA}^2 = (tb_1 - a_1)^2 + (tb_2 - a_2)^2 = t^2(b_1^2 + b_2^2) - 2t(a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1^2 + a_2^2) = t^2 - 2t(a_1b_1 + a_2b_2) + 1$$



La funzione $f(t) = t^2 - 2t(a_1b_1 + a_2b_2) + 1$ descrive, al variare di t, la distanza tra il generico punto P di r e il punto A. Il punto H cercato è quindi identificato dal valore di t che minimizza tale funzione. Trattandosi di una parabola il minimo corrisponde al vertice e, ricordando la formula che permette di calcolare il vertice si ottiene che $f(t)$ è minima per $t = a_1b_1 + a_2b_2$. Quindi $H = tB$, con $t = a_1b_1 + a_2b_2$.

Uguagliando quanto ottenuto con i due differenti metodi, otteniamo che

$$H = \cos(\alpha)B = (a_1b_1 + a_2b_2)B \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Vediamo come si modificano le cose se A e B non hanno norma 1. I vettori $\mathbf{u} = \dfrac{A}{\| A \|}$ e $\mathbf{v} = \dfrac{B}{\| B \|}$ hanno rispettivamente la stessa direzione di A e B, ma norma 1. Per esempio se $A = (1, -2)$, si ottiene $\mathbf{u} = \dfrac{A}{\| A \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Tali vettori di norma 1 vengono anche detti **versori**.

Per quanto appena ottenuto con vettori di norma 1, si ha

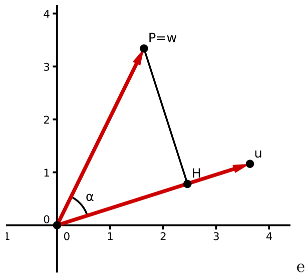
$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\| A \|}\frac{b_1}{\| B \|} + \frac{a_2}{\| A \|}\frac{b_2}{\| B \|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\| A \|\| B \|}$$

La quantità

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \| A \|\| B \| \cos(\alpha)$$

è detta **prodotto scalare** tra A e B.

Fissiamo un vettore $\mathbf{u}$ e consideriamo un secondo vettore $P = \mathbf{w}$. Dal punto di vista grafico, cosa rappresenta il prodotto scalare tra i due vettori?



Consideriamo i segmenti OP e OH in figura, consideriamo quindi α acuto. Sappiamo che $\overline{OH} = \overline{OP} \cdot \cos(\alpha)$. D'altra parte

$$\overline{OP} = \| \mathbf{w} \| \qquad \text{e} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{w} \|},$$

quindi

$$\overline{OH} = \| \mathbf{w} \| \cdot \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{w} \|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|} = \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} \cdot \mathbf{w}$$

Di conseguenza il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, diviso per la norma di $\mathbf{u}$, rappresenta la lunghezza della proiezione di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{u}$. Se in particolare $\mathbf{u}$ ha norma 1 il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ rappresenta la lunghezza della proiezione di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{u}$.

Se anzicché la lunghezza del segmento OH vogliamo scrivere il vettore o punto H, che ha ovviamente modulo $\overline{OH}$ e direzione parallela a $\mathbf{u}$, basta moltiplicare $\overline{OH}$ per il versore $\dfrac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|}$ di direzione $\mathbf{u}$:

$$H = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|^2} \cdot \mathbf{u}$$

Se α è ottuso bisogna fare attenzione ai segni in quanto $\cos(\alpha)$ e quindi anche il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ sono negativi. Quindi:

$$\overline{OH} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|} \qquad \text{e} \qquad H = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|} \cdot \frac{-\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|^2} \cdot \mathbf{u}$$

In generale quindi, qualsiasi si α:

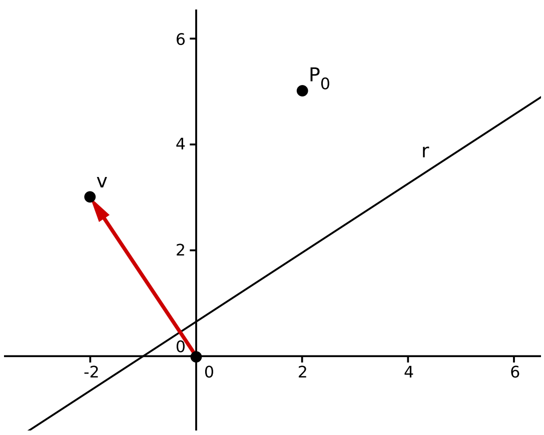
$$\overline{OH} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{\| \mathbf{u} \|} \qquad \text{e} \qquad H = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{u} \|^2} \cdot \mathbf{u}$$

Notiamo anche che se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ sono due vettori paralleli, allora P e H coincidono oppure sono simmetrici rispetto ad O quindi

$$\| \mathbf{w} \| = \overline{OH} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{\| \mathbf{u} \|}$$

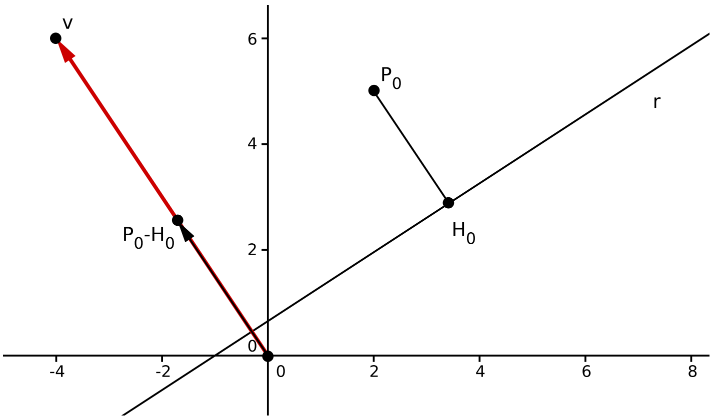
Vediamo come utilizzare quanto appena ottenuto per calcolare la distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$.

La retta r ha coeffiente angolare $-\frac{a}{b}$, quindi è parallela al vettore $(b, -a)$ e di conseguenza il vettore $\mathbf{v}(a, b)$ descrive la direzione ortogonale a r.



Notiamo che preso il generico punto $P(x, y)$ su r, e considerato il vettore P, si ha $P \cdot \mathbf{v} = ax + by$. Dal momento che P appartiene a r, le sue coordinate soddisfano l'equazione di r, quindi si ha $P \cdot \mathbf{v} = -c$.

Consideriamo la proiezione H_0 di P_0 su r. La distanza di P_o da H_0 è data da $\overline{P_0H_0} = \| P_0 - H_0 \|$.



Il vettore $P_0 - H_0$ è parallelo a $\mathbf{v}$, quindi per quanto osservato nel precedente paragrafo otteniamo:

$$\overline{P_0H_0} = \parallel P_0 - H_0 \parallel = \frac{|(P_0 - H_0) \cdot \mathbf{v}|}{\parallel \mathbf{v} \parallel} = \frac{|P_0 \cdot \mathbf{v} - H_0 \cdot \mathbf{v}|}{\parallel \mathbf{v} \parallel}$$

Sostituendo le coordinate di $\mathbf{v}$ e P_0 e sfruttando il fatto che H_0 appartiene a r, quindi $H_0 \cdot \mathbf{v} = -c$, otteniamo

$$d(P_0, r) = \overline{P_0H_0} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$