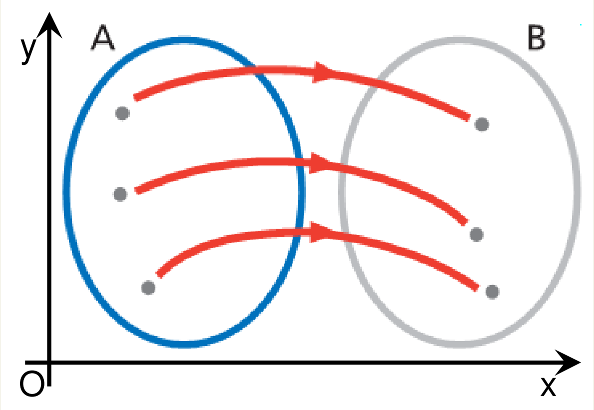
LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E I GRAFICI DELLE FUNZIONI

1. LE EQUAZIONI DI UNA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA

DEFINIZIONE

Una **trasformazione geometrica** nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.



ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases}$$

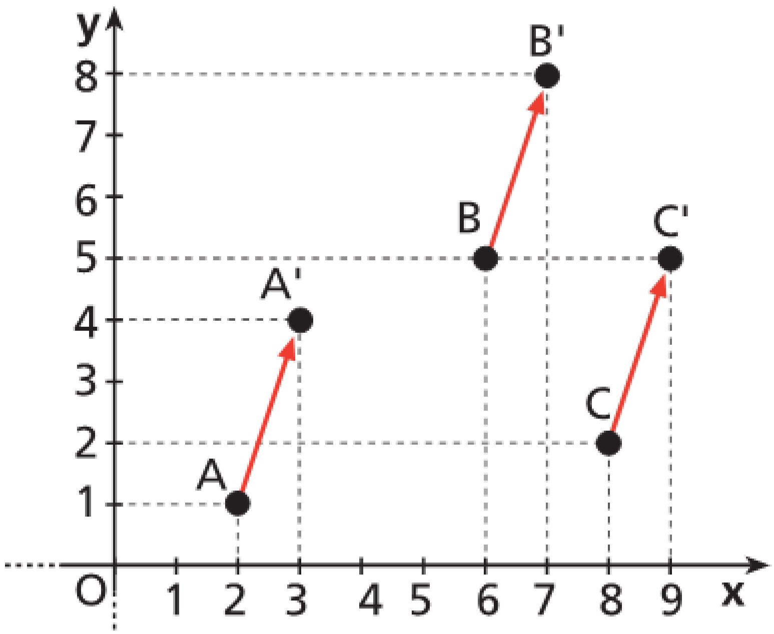
$P\,(2;\,1)$ $\qquad$ $P'\,(6;\,-2)$

2. LA TRASLAZIONE

Una **traslazione** è una isometria di equazioni $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$



Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa
e di 3 unità la sua ordinata.

3. LA TRASLAZIONE E IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Grafico di una funzione e della funzione traslata secondo il vettore $\vec{v}(a;b)$.

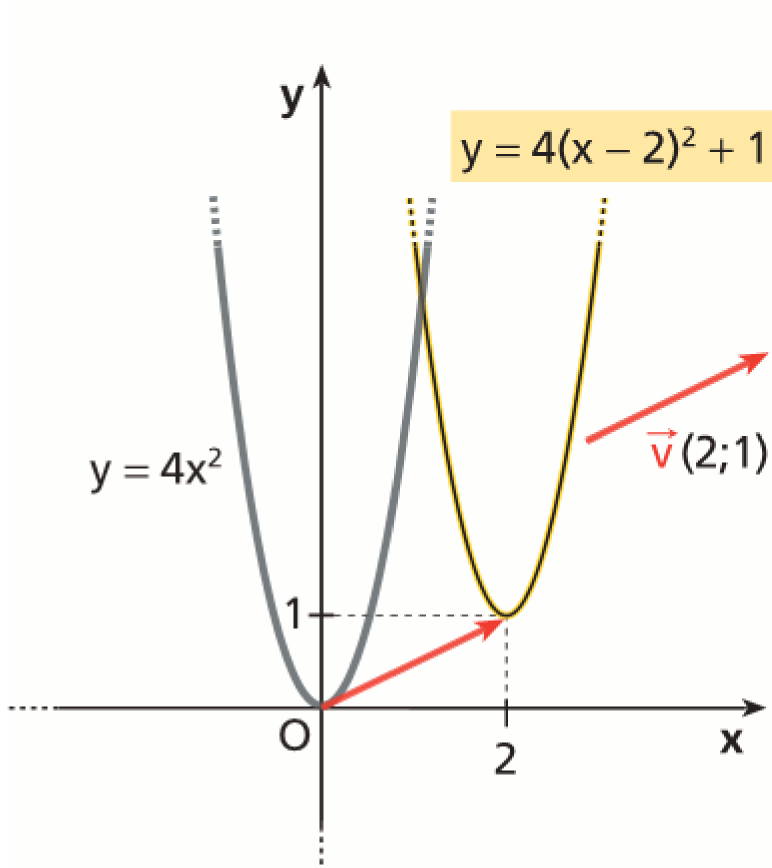
ESEMPIO

Data la funzione $y = 4x^2$ trasliamo il suo grafico secondo il vettore $\vec{v}(2;1)$.

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$ quindi

$$y' - 1 = 4(x' - 2)^2 \longrightarrow y' = 4(x' - 2)^2 + 1$$

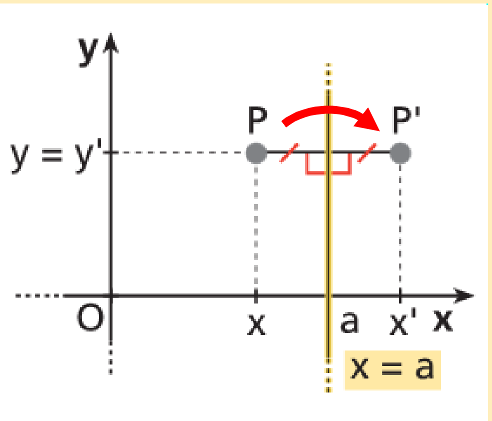
ovvero $y = 4(x-2)^2 + 1$



4. LE SIMMETRIE

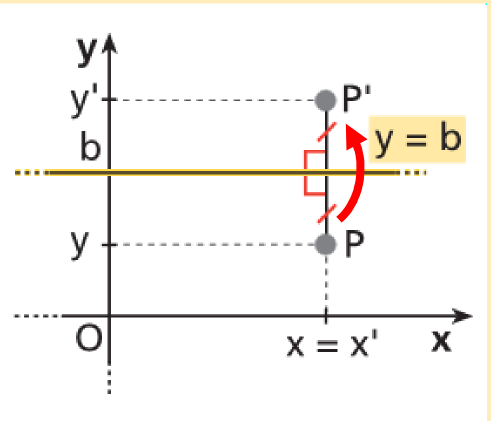
Simmetria rispetto all'asse *x* = *a*

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



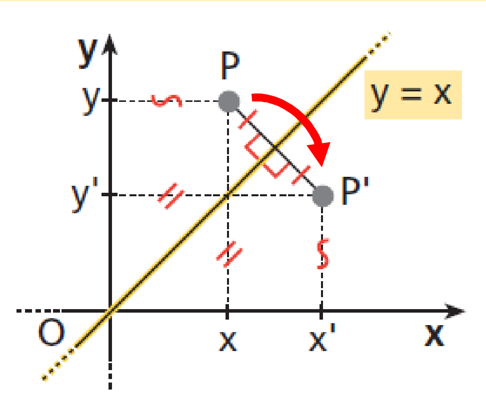
Simmetria rispetto all'asse *y* = *b*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all'asse *y* = *x*

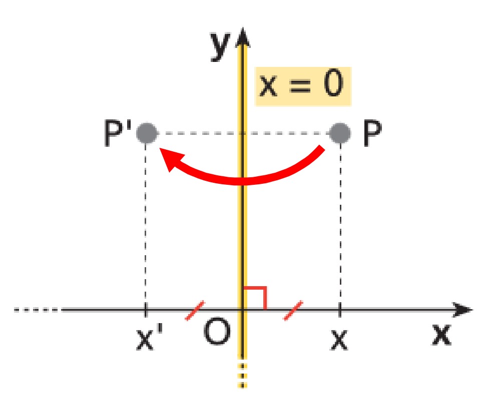
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



4. LE SIMMETRIE

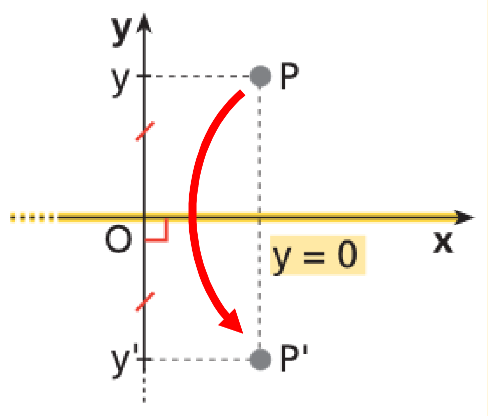
Simmetria rispetto all'asse $x = 0$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



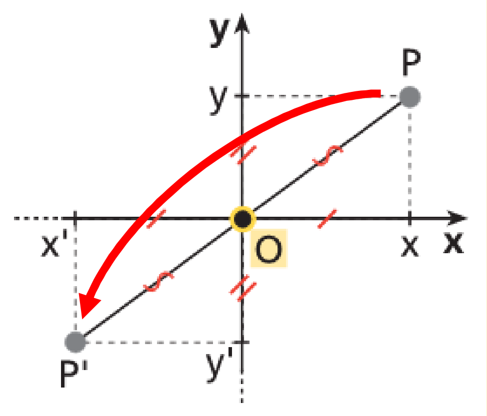
Simmetria rispetto all'asse $y = 0$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Simmetria centrale

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



5. LE SIMMETRIE E IL GRAFICO DELLE FUNZIONI

Grafico di $y = -f(x)$

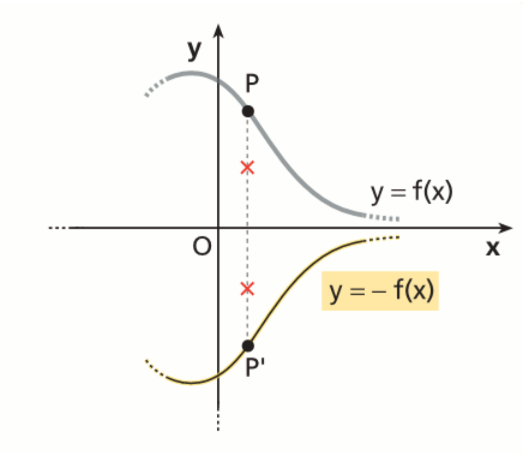


Grafico di $y = f(-x)$

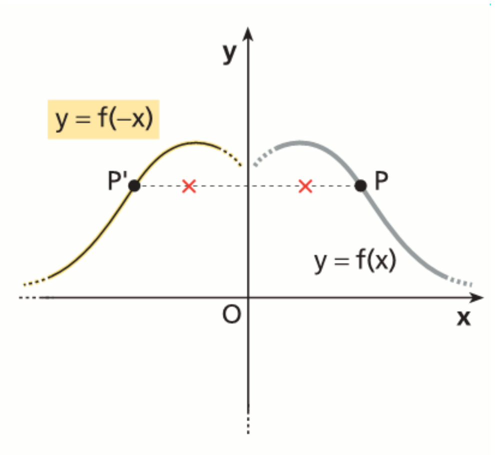
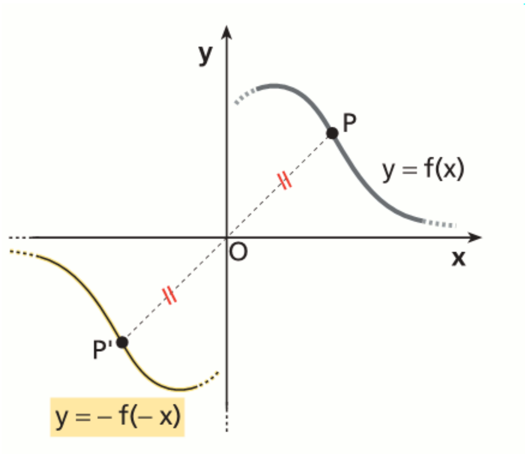


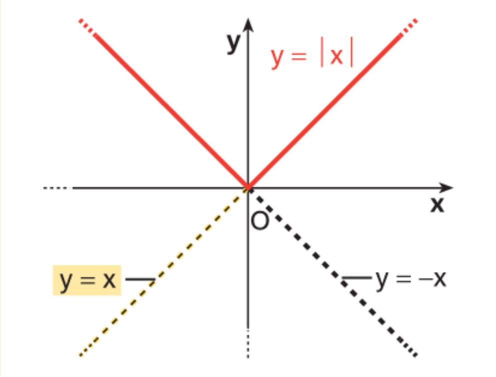
Grafico di $y = -f(-x)$



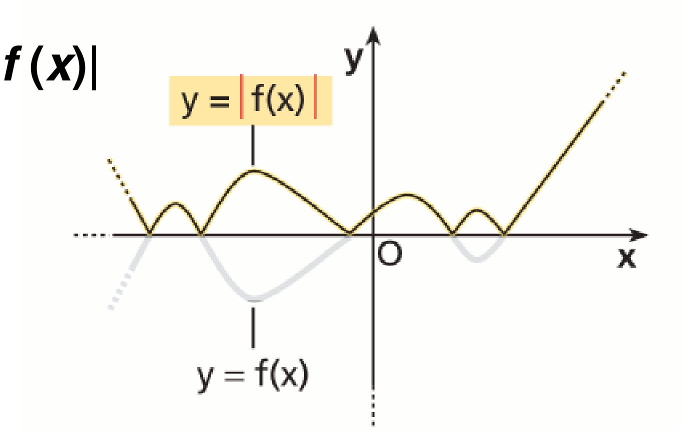
6. LE FUNZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

La funzione valore assoluto

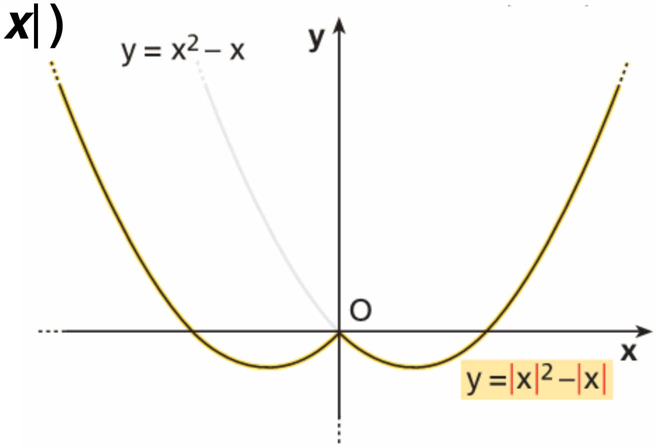
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il grafico di $y = |f(x)|$



Il grafico di $y = f(|x|)$

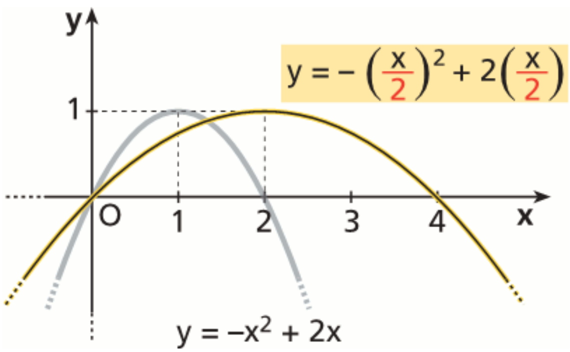


7. LA DILATAZIONE

Una **dilatazione** è una trasformazione non isometrica di equazioni $\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$ con $m, n \in \mathbb{R}^+$.

ESEMPIO

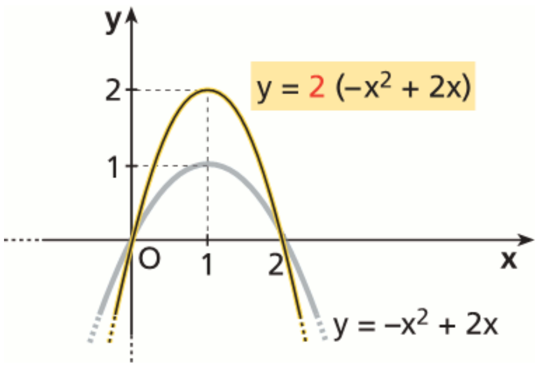
***n* = 1,**
***m* = 2**



Data la funzione $y = f(x)$, la funzione f' il cui grafico è il corrispondente di f mediante la dilatazione è $y = n f\left(\frac{x}{m}\right)$.

ESEMPIO

***m* = 1,**
***n* = 2**



ZANICHELLI

8. ESERCIZI: LA TRASLAZIONE

ESERCIZIO GUIDA

Date le equazioni

a) $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = -y + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2 + x \\ y' = 3 + y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$

riconosciamo quale coppia rappresenta una traslazione e scriviamo le componenti del vettore di traslazione.

Le equazioni di una traslazione di vettore $\vec{v}\,(a; b)$ sono del tipo $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Le equazioni a) e c) non rappresentano una traslazione perché in entrambi i sistemi i coefficienti di x e y non sono uguali a 1. Le equazioni b) rappresentano invece una traslazione di vettore $(-2; 3)$.

8. ESERCIZI: LA TRASLAZIONE

ESERCIZIO GUIDA

Trasliamo il triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(2; 5)$ e $C(-1; 3)$ secondo il vettore $\vec{v}(3; -4)$.

Scriviamo le equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

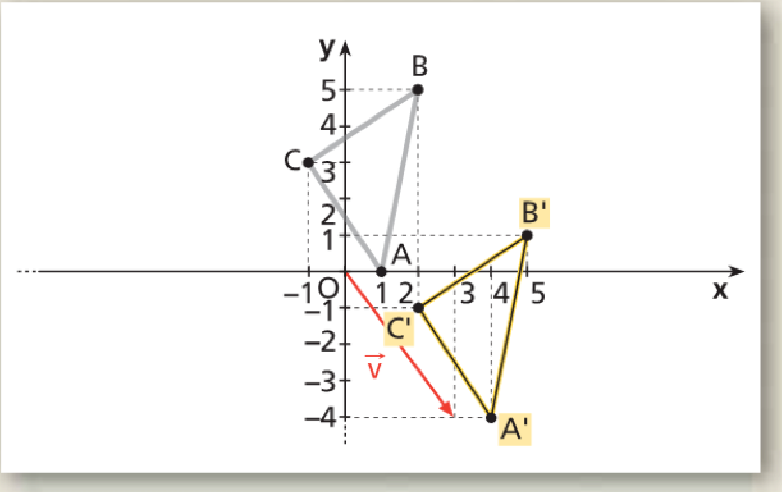
Determiniamo le coordinate dei punti corrispondenti ai dati:

$A(1; 0) \quad \rightarrow \quad A'(4; -4)$

$B(2; 5) \quad \rightarrow \quad B'(5; 1)$

$C(-1; 3) \quad \rightarrow \quad C'(2; -1)$

Disegniamo il vettore $\vec{v}$ con il primo estremo nell'origine e i due triangoli corrispondenti.



9. ESERCIZI: LA TRASLAZIONE E IL GRAFICO DELLE FUNZIONI

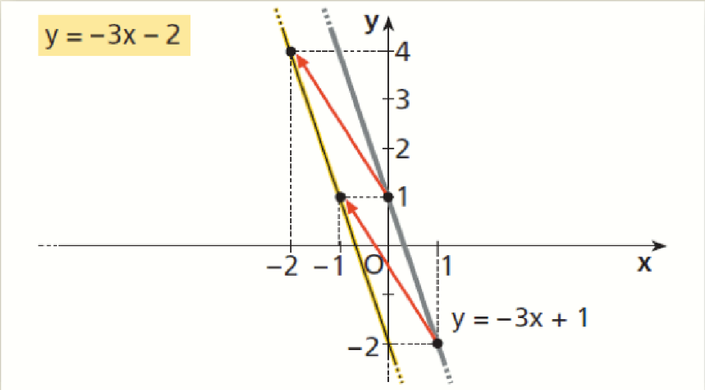
ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = -3x + 1$, scriviamo l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando $y = f(x)$ secondo il vettore $\vec{v}(-2; 3)$ e disegniamo il grafico.

Dall'equazione di $y = f(x)$ passiamo all'equazione $y = f(x - a) + b$, dove $a = -2$ e $b = 3$:

$$y = -3(x + 2) + 1 + 3 \rightarrow y = -3x - 2.$$

Disegniamo poi il grafico di $f(x)$ e di $f'(x)$.



10. ESERCIZI: LE SIMMETRIE

ESERCIZIO GUIDA

Date le equazioni

a) $\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -6 + x \\ y' = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$

riconosciamo quali tra queste rappresentano una simmetria, individuando le simmetrie rispetto a rette parallele all'asse x o all'asse y, o rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante o rispetto all'origine.

Le equazioni delle simmetrie sono del tipo:

$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ Simmetria rispetto alla retta $x = a$ parallela all'asse y

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ Simmetria rispetto alla retta $y = b$ parallela all'asse x

$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ Simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ Simmetria rispetto all'origine O

Le equazioni a) rappresentano una simmetria rispetto alla retta $x = -2$.
Le equazioni b) non rappresentano una simmetria ma una traslazione di vettore $\vec{v}(-6; 0)$.
Le equazioni c) rappresentano una simmetria rispetto alla retta $y = 4$.
Le equazioni d) non rappresentano una simmetria.

11. ESERCIZI: LE SIMMETRIE E IL GRAFICO DELLE FUNZIONI

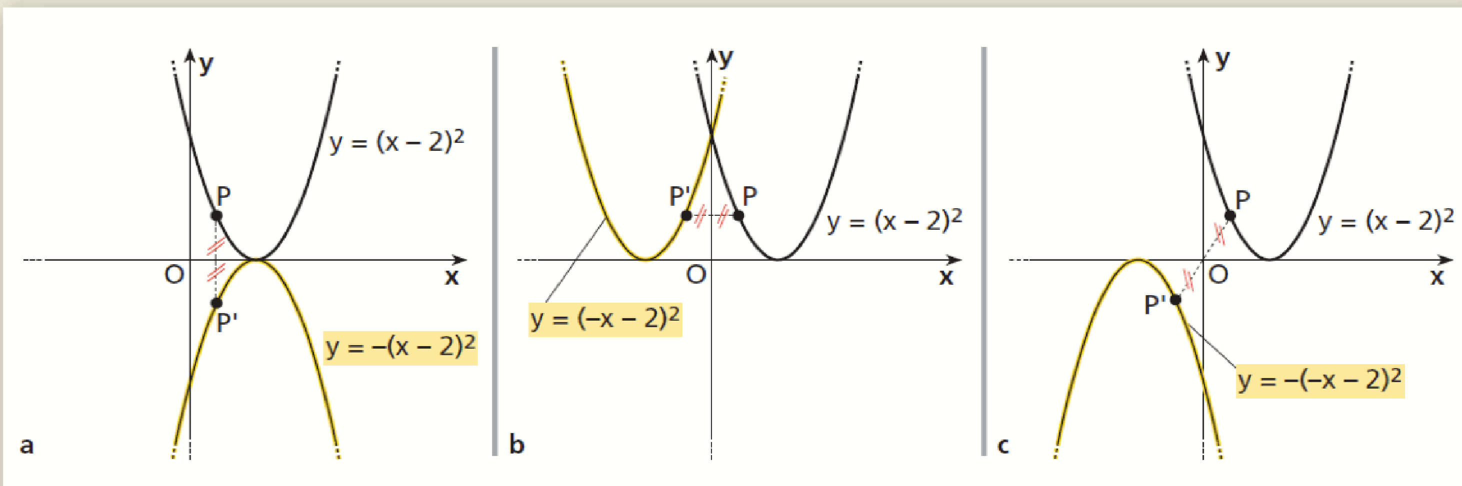
ESERCIZIO GUIDA

Consideriamo la funzione di equazione $y = (x-2)^2$. Determiniamo l'equazione e il grafico della funzione simmetrica a) rispetto all'asse x, b) rispetto all'asse y, c) rispetto all'origine.

a) La funzione simmetrica rispetto all'asse x ha equazione $y = -f(x)$, quindi $y = -(x-2)^2$.

b) La funzione simmetrica rispetto all'asse y ha equazione $y = f(-x)$, quindi $y = (-x-2)^2$.

c) La funzione simmetrica rispetto all'origine ha equazione $y = -f(-x)$, quindi $y = -(-x-2)^2$.



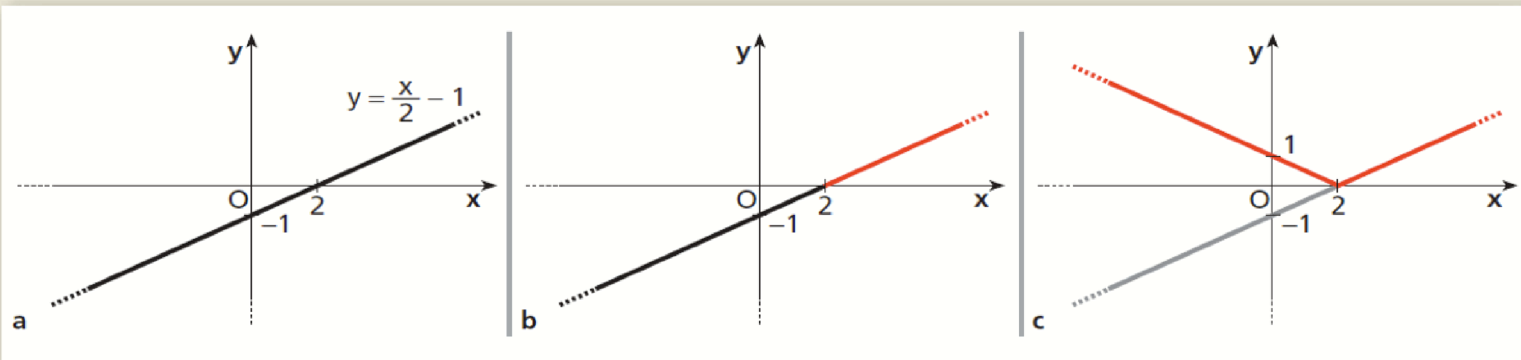
12. ESERCIZI: LE FUNZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico della funzione $y = \left|\frac{x}{2} - 1\right|$.

Per ottenere il grafico:

- disegniamo quello di $y = \frac{x}{2} - 1$ (figura *a*);
- confermiamo il grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate dei punti sono positive o nulle, ossia per $x \geq 2$ (figura *b*);
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse x del grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate sono negative, ossia per $x < 2$ (figura *c*).
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse x del grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate sono negative, ossia per $x < 2$ (figura *c*).



12. ESERCIZI: LE FUNZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico della funzione $y = \frac{|x|}{2} - 1$.

Per ottenere il grafico:

- disegniamo quello di $y = \frac{x}{2} - 1$ (figura *a*);
- confermiamo il grafico precedente nell'intervallo in cui le ascisse dei punti sono positive o nulle, ossia per $x \geq 0$ (figura *b*);
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse *y* del grafico precedente nell'intervallo in cui le ascisse sono negative, ossia per $x < 0$ (figura *c*).