FUNÇÃO QUADRÁTICA

CONTEÚDOS

- Função quadrática
- Raízes da função quadrática
- Gráfico de função
- Ponto de máximo e de mínimo de uma função

AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Observe na imagem a seguir, a trajetória realizada por uma bola no momento em que um jogador a chutou em direção ao gol.

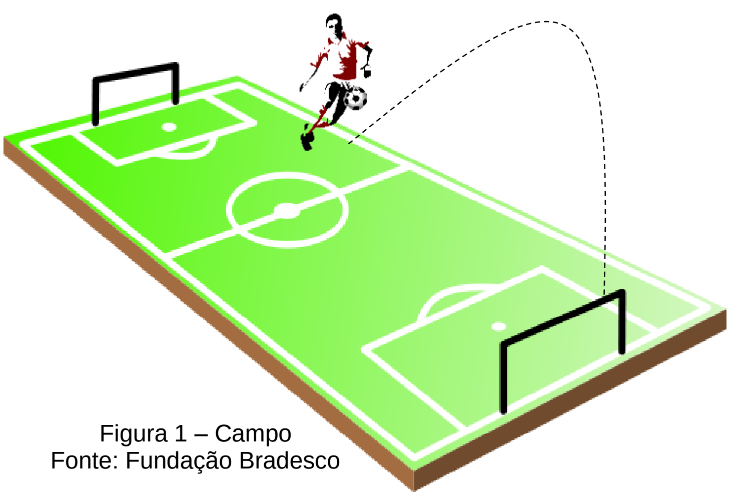


Figura 1 – Campo
Fonte: Fundação Bradesco

Observamos que a bola subiu, atingiu um ponto máximo de altura e logo em seguida desceu em direção ao solo. Essa trajetória recebe o nome de parábola.

Uma parábola pode ser descrita algebricamente por meio de uma função quadrática. E são essas funções que nós estudaremos neste capítulo.

Uma **função quadrática** (ou função polinomial do 2º grau) é definida por **$y = ax^2 + bx + c$**, com $a \neq 0$. Podemos ainda, definir a função quadrática como **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, com $a \neq 0$. Temos como domínio da função os números reais.

Em uma função quadrática, os elementos a, b e c são identificados como coeficientes da função.

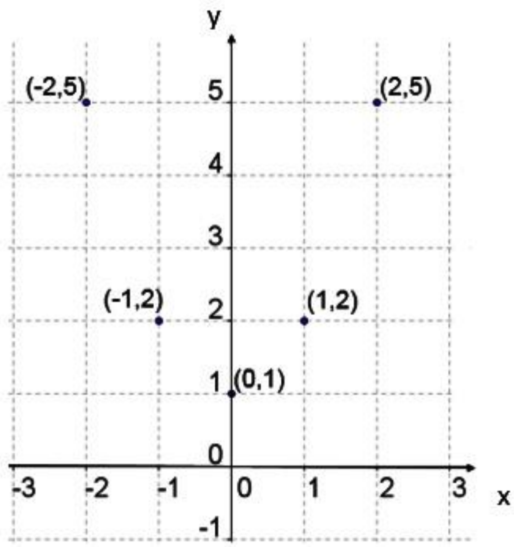
Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

- $y = x^2 - 2x + 8$, nessa função temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = 8$
- $y = x^2 + 1$, nessa função temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$
- $y = x^2$, nessa função temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$
- $y = -x^2 + 2$, nessa função temos: $a = -1$, $b = 0$ e $c = 2$

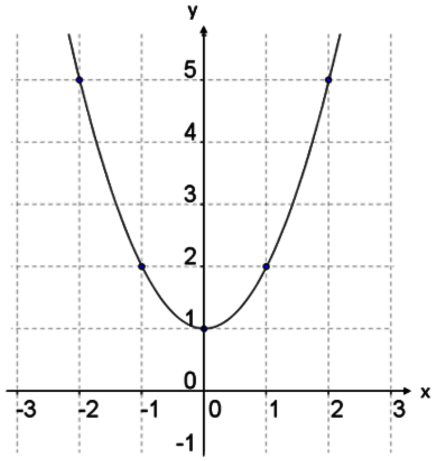
Como já exposto, no início deste capítulo, o gráfico da função quadrática é uma parábola. Para construir o gráfico de uma função quadrática, considerando x como qualquer número real, vamos atribuir alguns valores para x, determinando o par ordenado (x, y). Como exemplo, será construído o gráfico da função $y = x^2 + 1$

x	$y = x^2 + 1$	y	(x,y)
0	$y = 0^2 + 1$	1	(0,1)
1	$y = 1^2 + 1$	2	(1,2)
- 1	$y = (-1)^2 + 1$	2	(-1,2)
2	$y = 2^2 + 1$	5	(2,5)
- 2	$y = (-2)^2 + 1$	5	(- 2,5)

Dado os pares ordenados (0,1), (1,2), (- 1,2), (2,5) e (- 2,5), representando-os no plano cartesiano, temos os pontos indicados no gráfico a seguir:



O conjunto de todos os pontos (x,y) com x real e $y = x^2 + 1$, é o gráfico da função.

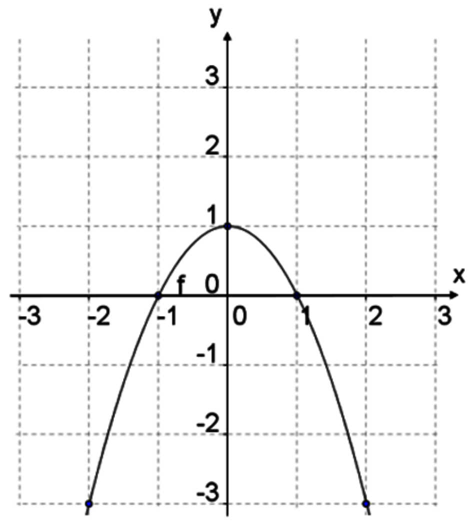


Vamos agora construir o gráfico da função $y = - x^2 + 1$

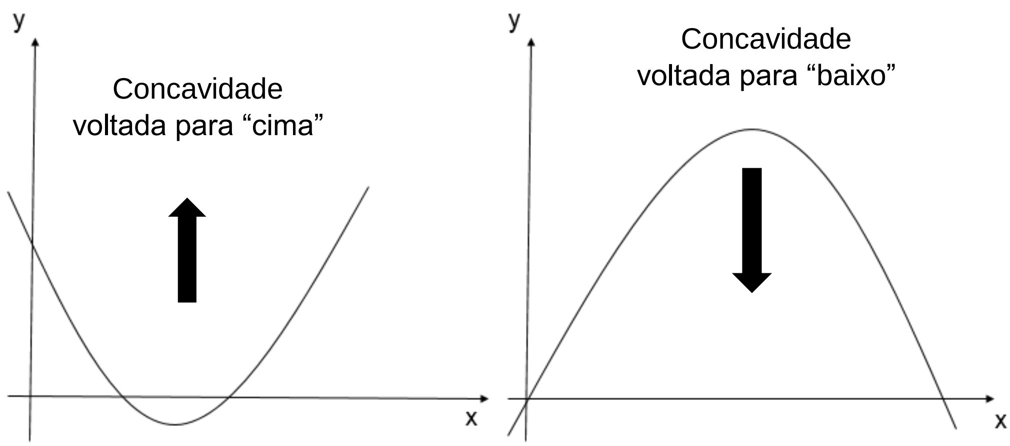
x	$y = - x^2 + 1$	y	(x,y)
0	$y = - 0^2 + 1$	1	(0,1)
1	$y = - (1)^2 + 1$	0	(1,0)
- 1	$y = - (-1)^2 + 1$	0	(-1,0)
2	$y = - (2^2) + 1$	- 3	(2, -3)
- 2	$y = - (-2)^2 + 1$	- 3	(- 2,- 3)

Dado os pares ordenados (0,1), (1,0), (- 1,0), (2,- 3) e (- 2,- 3), representando-os no plano cartesiano, temos os pontos indicados no gráfico a seguir:

O conjunto de todos os pontos (x,y) com x real e $y = - x^2 + 1$, é o gráfico da função.



O gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, pode apresentar as seguintes formas:

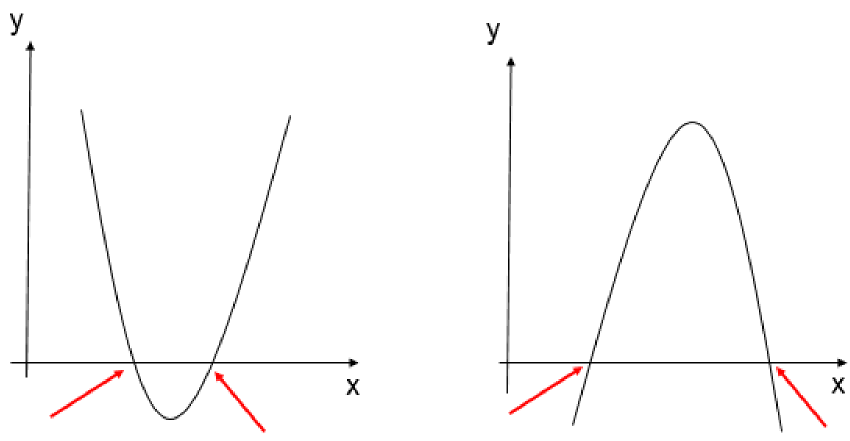


Em uma função quadrática, quando:

- **a > 0**, a concavidade será voltada para “cima”.
- **a < 0**, a concavidade será voltada para “baixo”.

Zero da função quadrática

Identifica-se como zero ou raiz da função, os pontos em que a parábola intercepta o eixo das abscissas (eixo x).



Esses pontos apresentam y = 0, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$.

<u>Dica</u>:

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \qquad \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Para rever a resolução da fórmula de Bhaskara, faça uma leitura do capítulo sobre equações do 2º grau.

Para que uma equação $x^2 + bx + c = 0$ apresente raízes reais, devemos ter $\sqrt{\Delta} \in IR$. Desta forma, temos:

$\Delta > 0$ $\longrightarrow$ A equação apresentará 2 raízes reais distintas.

$\Delta = 0$ $\longrightarrow$ A equação apresentará 2 raízes reais iguais.

$\Delta < 0$ $\longrightarrow$ A equação não apresentará raiz real.

Vejamos alguns exemplos:

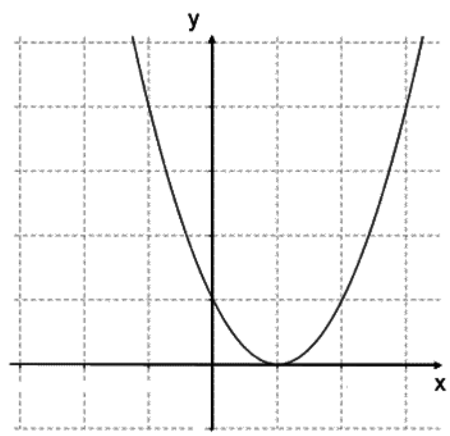
1º - Dada a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, vamos determinar suas raízes calculando apenas o delta.

Acompanhe: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\qquad \Delta = (-2)^2 - 4.1.1$ $\qquad \Delta = 4 - 4$ $\qquad \Delta = 0$

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2.1}$ $\qquad x = \dfrac{2 \pm 0}{2}$ $\qquad x_1 = \dfrac{2 + 0}{2} = 1$ $\qquad x_2 = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$

Neste caso, o valor do discriminante é igual a zero e a equação tem duas raízes iguais. Observe o gráfico:



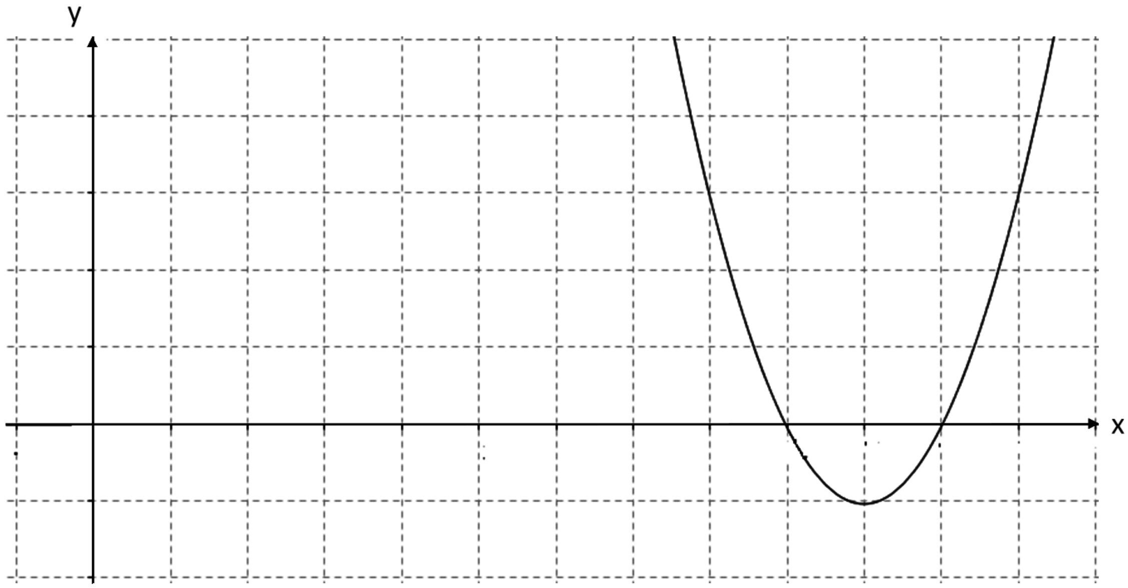
2º - Dada a equação $x^2 - 20x + 99 = 0$, vamos determinar suas raízes.

Acompanhe: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\qquad \Delta = (-20)^2 - 4.1.99$ $\qquad \Delta = 400 - 396$ $\qquad \Delta = 4$

$x = \dfrac{-(-20) \pm \sqrt{4}}{2.1}$ $\qquad x = \dfrac{20 \pm 2}{2}$ $\qquad x_1 = \dfrac{20 + 2}{2} = 11$ $\qquad x_2 = \dfrac{20 - 2}{2} = 9$

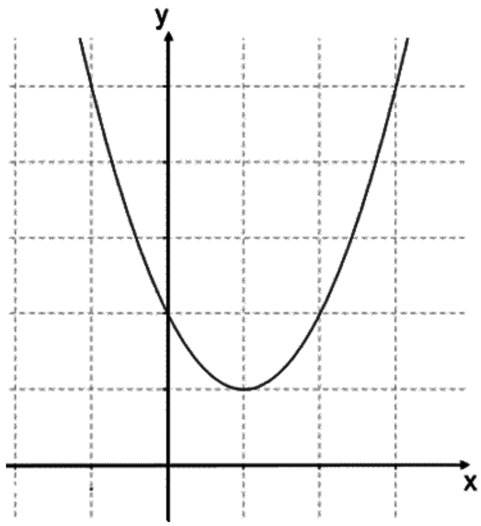
Neste caso, o valor do discriminante é um número real positivo e a equação apresenta duas raízes. Observe o gráfico:



3º - Dada a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ vamos determinar suas raízes.

Acompanhe: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = (-2)^2 - 4.1.2$ $\Delta = 4 - 8$ $\Delta = -4$

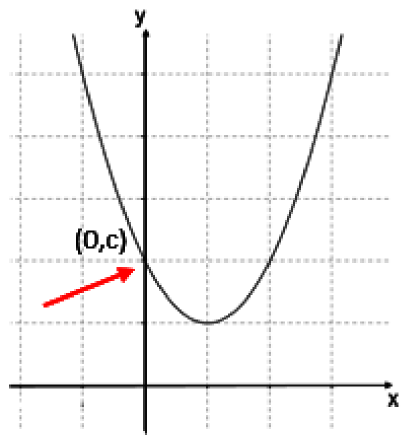


Observe que o valor do discriminante é um número negativo. E não existe raiz real de um número negativo. Portanto, dizemos que essa equação não tem raiz real.

Ainda em relação ao gráfico de uma função quadrática, podemos observar que:

Dada uma função $y = ax^2 + bx + c$, o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, temos $x = 0$. Substituindo x por 0, temos: $f(0) = c$, ou seja, $y = c$.

Portanto, o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, temos as coordenadas (0,c)



Vértice da parábola

O ponto em que temos as coordenadas $\left(-\frac{b}{2.a}, \frac{-\Delta}{4.a}\right)$ é identificado como vértice da parábola. Vejamos como determinar o vértice utilizando essas expressões.

Dadas as funções $y = x^2 + 3x$ e $y = - x^2 + 3x$, determinaremos o vértice da parábola que representa cada uma delas.

Primeiramente vamos calcular as coordenadas do vértice da função $y = x^2 + 3x$

Para determinar a coordenada x utilizaremos a expressão $-\frac{b}{2.a}$.

Nesta função, temos a = 1, b = 3 e c = 0

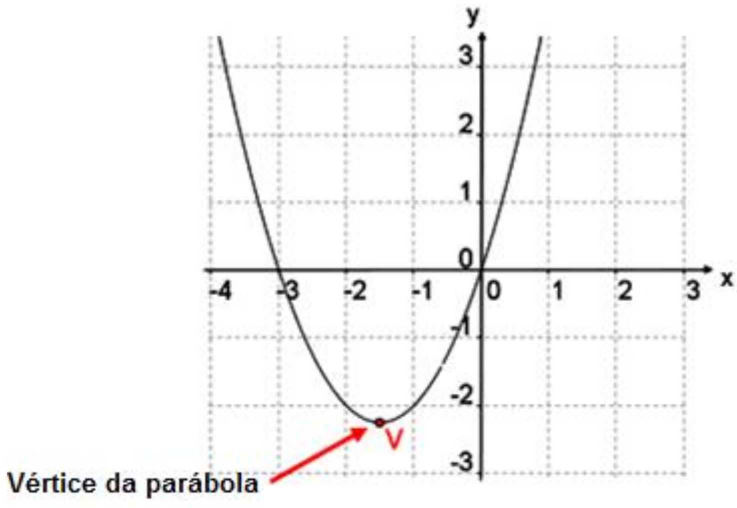
$$x_v = -\frac{3}{2.1} = -1{,}5 \text{ (coordenada x do vértice)}$$

Para determinar a coordenada y utilizaremos a expressão $-\frac{\Delta}{4.a}$.

Devemos lembrar que: $\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 3^2 - 4.1.0$ $\Delta = 9$ $y_v = -\dfrac{9}{4.1} = -2{,}25$ (coordenada y do vértice)

Para função y = x² + 3x, temos as seguintes coordenadas do vértice de sua parábola (- 1,5; - 2,25). Observe o gráfico que apresenta a parábola da função.



Determinaremos agora o vértice da parábola que representa função y = - x² + 3x .

Para determinar a coordenada x utilizaremos a expressão $-\dfrac{b}{2.a}$.

Nesta função temos a = - 1, b = 3 e c = 0

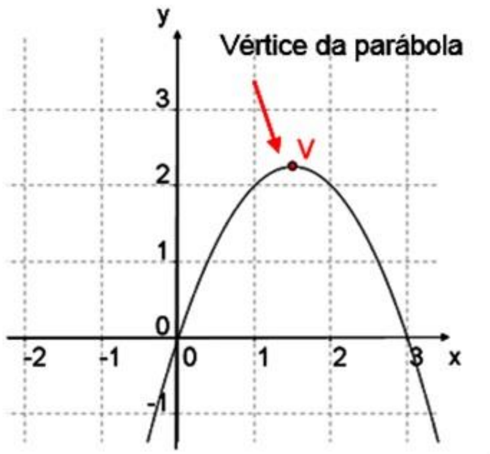
$$x_v = -\frac{3}{2.(-1)} = 1{,}5$$

Para determinar a coordenada y utilizaremos a expressão $-\dfrac{\Delta}{4.a}$.

Devemos lembrar que: $\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 3^2 - 4.(-1).0$ $\Delta = 9$ $y_v = -\dfrac{9}{4.(-1)} = 2{,}25$

Para função y = - x² + 3x, temos a seguinte coordenada do vértice de sua parábola (1,5; 2,25). Observe o gráfico que apresenta a parábola da função.

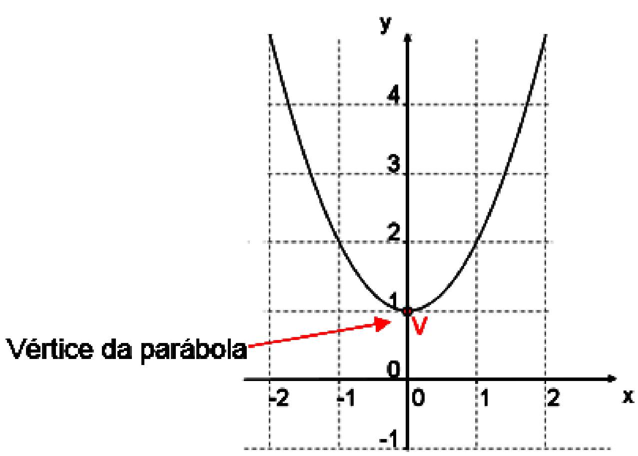


Em uma função que temos o coeficiente b igual a zero, o vértice da parábola terá a coordenada (0, c). Vejamos um exemplo: y = x² + 1

Nessa função temos: $x_v = -\dfrac{b}{2.a}$ $\qquad$ $x_v = -\dfrac{0}{2.1} = 0$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4.a}$ $\qquad$ $y_v = -\dfrac{0^2 - 4.1.1}{4.1}$ $\qquad$ $y_v = -\dfrac{(-4)}{4}$ $\qquad$ $y_v = 1$

Para função y = x² + 1, temos a seguinte coordenada do vértice de sua parábola (0,1). Observe o gráfico que apresenta a parábola da função.



Veja que neste caso, a função não tem raiz real.

Dica

Ao calcular a coordenada x do vértice da parábola, seu valor pode ser utilizado para obter a coordenada y. Para tanto, basta substituir o valor do vértice x na função. Veja alguns exemplos:

1º : $y = -x^2 + 3x$ $\quad x_v = -\frac{b}{2.a}$ $\quad x_v = -\frac{3}{2.(-1)} = 1{,}5$

$y_v = -(1{,}5)^2 + 3.1{,}5$ $\quad y_v = -2{,}25 + 4{,}5$ $\quad y_v = 2{,}25$

Portanto, para a função $y = -x^2 + 3x$, temos para o vértice da parábola o ponto de coordenadas (1,5; 2,25)

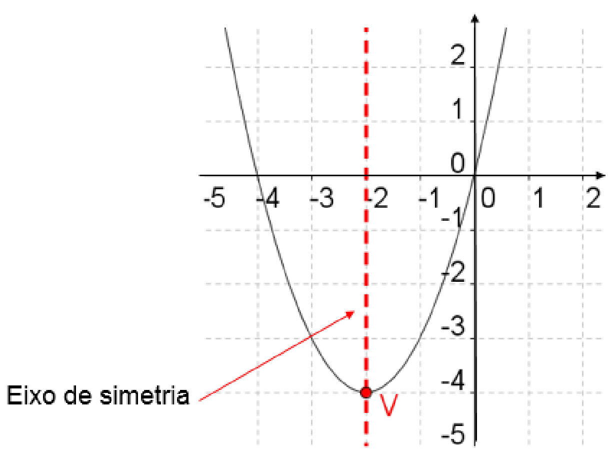
2º: $y = x^2 + 1$ $\quad x_v = -\frac{b}{2.a}$ $\quad x_v = -\frac{0}{2.1} = 0$

$y_v = 0^2 + 1$ $\quad y_v = 1$

Portanto, para a função $y = x^2 + 1$, temos para o vértice da parábola o ponto de coordenadas (0,1)

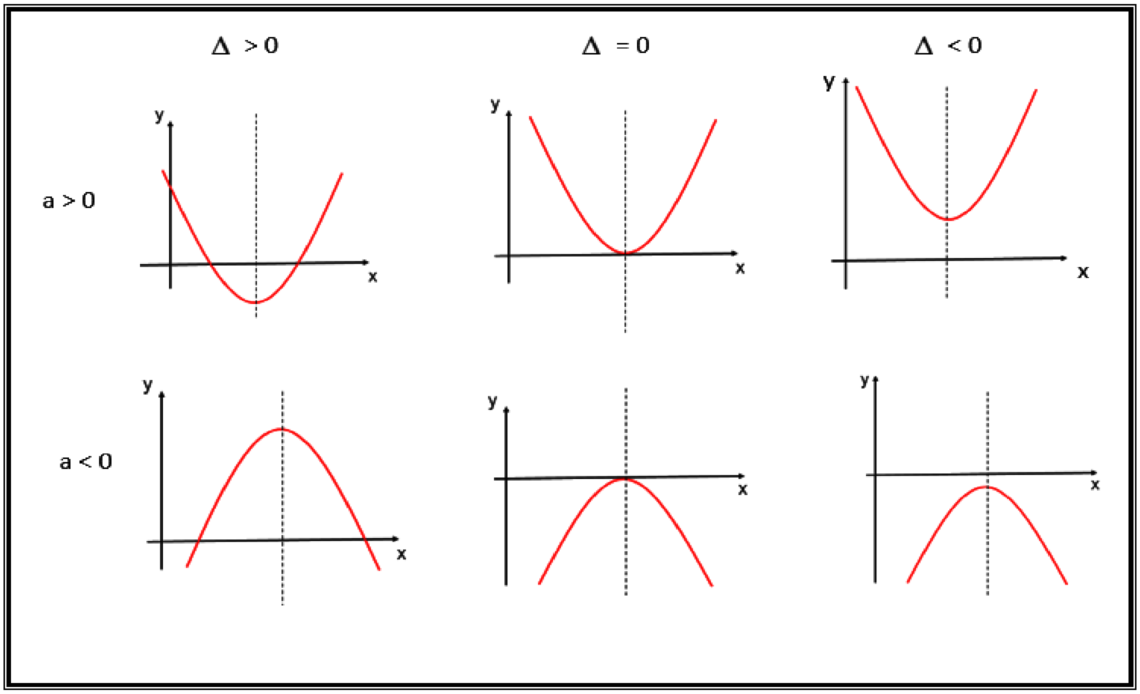
O eixo de simetria

O eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática é representado pela reta vertical que passa pelo vértice. Os pontos da reta vertical que passam pelo vértice têm abcissa $x = -\frac{b}{2.a}$. Observe no gráfico da função $y = x^2 + 4x$ a reta que representa o eixo de simetria.



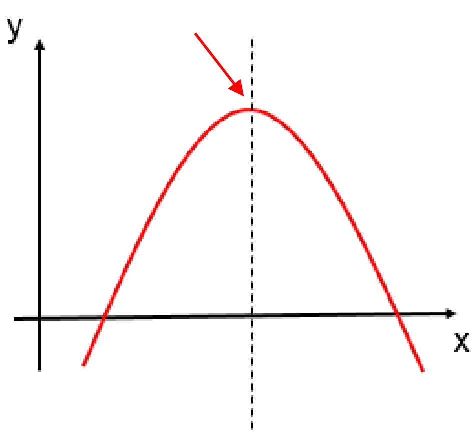
Características do gráfico

Veja no quadro a seguir, um resumo das características dos gráficos das funções $y = ax^2 + bx + c$.

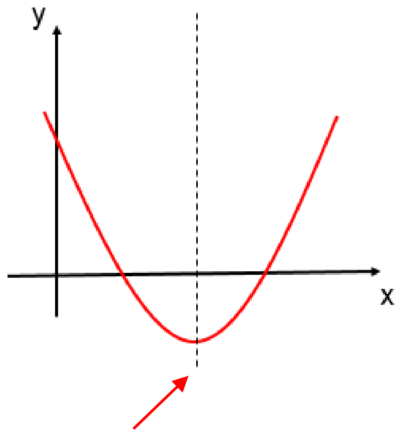


Máximo e mínimo da função

Quando a função $y = ax^2 + bx + c$ apresenta $a < 0$, o vértice da parábola é identificado como ponto de máximo da função.



Quando a função $y = ax^2 + bx + x$, apresenta $a > 0$, o vértice da parábola é identificado como ponto de mínimo da função.



ATIVIDADES

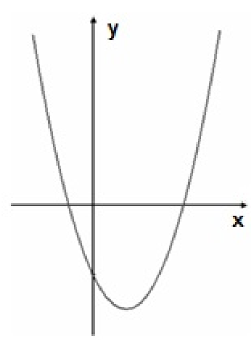
1**.** Identifique, dentre as funções apresentadas, aquelas que são funções quadráticas.

a) $y = x^2$	b) $y = - x + 1$	c) $y = 6x + x^2$	d) $y = - 2x^2$
d) $y = 5x^3$	e) $y = x^2 - 2$	f) $y = x^3 + x^2$	g) $y = x^2 + 2x + 1$

2. Dada a função $y = - x^2 + 5x$, em relação as suas raízes pode-se afirmar que:

a) elas são reais e iguais a zero.
b) essa função não apresenta raiz real.
c) elas são reais e distintas.

3. (UFRGS – 2011) O gráfico do polinômio de coeficientes reais $p(x) = ax^2 + bx + c$ está representado abaixo.



Com base nos dados desse gráfico, é correto afirmar que os coeficientes a, b e c satisfazem as desigualdades

a) $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$.
b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$.
c) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.
d) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$.
e) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$.

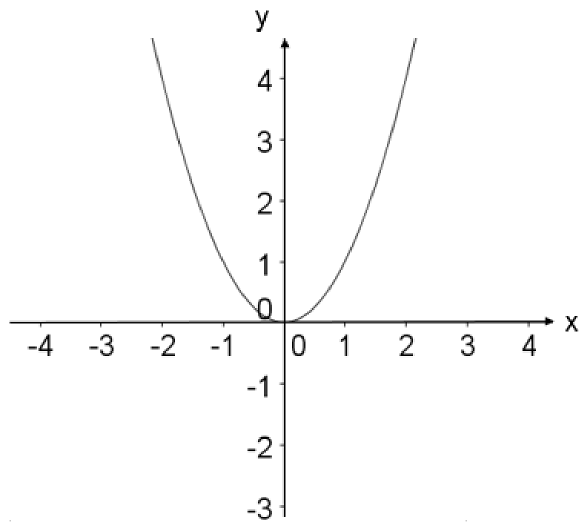
4.(ENEM 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = - h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está

a) muito alta.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

5. A seguir, temos o gráfico de uma função quadrática. Observando apenas o gráfico, determine as coordenadas do ponto de mínimo da função.



6. (ENEM – 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.

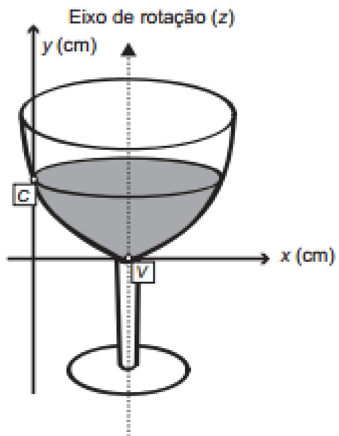
b) $V = 10.000 + 50x + x^2$

c) $V = 15.000 – 50x – x^2$.

d) $V = 15.000 + 50x – x^2$.

e) $V = 15.000 – 50x + x^2$.

7. A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei f(x) = $\frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizada no eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

8. Dada as funções $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$, qual delas possui o menor valor da coordenada y do vértice da parábola que representa a função?

INDICAÇÕES

Consulte os *links* indicados a seguir e estude um pouco mais sobre as funções quadráticas.

Função quadrática

Disponível em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap103.html

Caso queira aprofundar seu conhecimento, o *link* traz uma série de exercícios que envolvem a função quadrática.

Função quadrática

Disponível em: http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=61#

O *link* traz um conjunto de vídeo aulas que exploram o tema função. Entre elas você terá vídeos que propõem alguns exercícios.

Função quadrática

Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/quadratica_exercicios.html

Caso queira aprofundar seu conhecimento, o *link* traz alguns exercícios que abordam a função quadrática.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Giovanni; JUNIOR, Giovanni. **A Conquista da Matemática 9º ano**. São Paulo: FTD, 2015. p.164 – 184

INEP. **ENEM 2009 – Prova Azul.** Disponível em:< http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf>. Acesso em: 03 out. 2016.10h.

INEP**. ENEM 2013 – Prova Amarela.** Disponível em:< http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf.> Acesso em: 03 out. 2016. 11h.

INEP. **ENEM 2015. Prova Amarela**. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 03 out. 2016. 10h10min.

SÃO PAULO (Estado). Secretária da Educação (SEE). **Educação de Jovens e Adultos: Mundo do Trabalho** modalidade semipresencial, v 1. p. 92 – 106. Matemática: caderno do estudante. Disponível em: <http://www.ejamundodotrabalho.sp.gov.br/ConteudoCEEJA.aspx?MateriaID=78&tipo=Aluno>. Acesso em: 20 set. 2016. 10h.

SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Giovanni; JUNIOR, Giovanni. **Matemática no Ensino Médio**. v.1. 6º ed.. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 116 – 131

UFRGS. **Vestibular 2011. Prova de Matemática**. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/Matemtica2011.pdf>. Acesso em: 03 out. 2016. 8h51min.

GABARITO

1. Considerando que uma função quadrática é definida com $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, atendendo essa definição, temos as alternativas a, c, d, e, g.

2. A alternativa correta é a letra C.

Para conhecer as raízes da função, devemos considerar que y é igual a zero. Assim, temos:

$y = - x^2 + 5x$

$0 = - x^2 + 5x$

Dada a equação $– x^2 + 5x = 0$, vamos calcular o valor de delta.

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 5^2 - 4. (-1).0$ $\Delta = 25$

Sendo $\Delta > 0$, podemos afirmar que as raízes da função são reais e distintas.

3. A alternativa correta é a letra A.

No gráfico de uma função polinomial do 2º grau observa-se as seguintes características:

Se o coeficiente a for maior que zero, a concavidade da párabola será voltada “ para cima”.

O ponto em que a parábola intercepta o eixo y, temos x igual a zero. Assim, temos para esse ponto o par ordenado (0, c). No caso do gráfico apresentado, observa-se que o ponto em que a párabola intercepta o eixo das ordenadas, é representado pelo par ordenado (0, - c).

Para se calcular a coordenada x do vértice de uma parábola, utiliza-se a expressão x = $\frac{-b}{2.a}$

Considerando que a é um valor positivo, e que visualizando o gráfico observa-se que a coordenada x do vértice tem valor positivo, para que isso ocorra, é necessário que o coeficinete b seja menor que zero. Logo, para o gráfico apresentado, é necessário que os coeficientes sejam: a> 0; b < 0; c < 0.

4. A resposta correta é a alternativa D.

Considerando que a temperatura na função pode ser calculada pela função quadrática T(h) = - h² + 22h – 85, o maior valor que essa função atingirá, será representado pelo vértice da parábola que a descreve. Portanto, se a temperatura está em função do tempo, devemos calcular a coordenada y do vértice dessa parábola para que seja possível saber qual será a temperatura máxima atingida.

$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$

Δ = b² - 4.a.c Δ = 22² - 4.(-1).(-85) Δ = 484 – 340 Δ = 144

$y_v = \frac{-144}{4.(-1)}$ $y_v = 36$

Para temperatura igual a 36, temos o intervalo $30 \leq T \leq 43$, o qual corresponde a classificação alta.

5. Em análise ao gráfico, observa-se que seu vértice está na origem do eixo, portanto, o ponto de mínimo tem coordenadas (0,0).

6. A alternativa correta é a D.

O valor arrecadado será o resultado da multiplicação entre a quantidade de litros vendida e o preço pago por litro. Assim, temos.

$$V = (\underbrace{10.000 + 100.x}_{\text{10.000 vendidos por dia, somados a quantidade que é adicionada de acordo com o desconto.}}).(1,5 - 0,01.x)$$

Aplicando a distributiva, temos:

$V = 10.000.1,5 - 10.000.0,01.x + 100x.1,5 - 100x.0,01.x$

$V = 15.000 - 100x + 150x - x^2$

$V = 15.000 + 50x - x^2$

7. A alternativa correta é a letra E.

Na imagem, observamos que a função tem duas raízes reais e iguais, portanto temos delta igual a zero.

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 0$ $b^2 - 4.a.c = 0$ $(-6)^2 - 4.\frac{3}{2}.C = 0$

$36 - \frac{12}{2}.C = 0$ $36 - 6.C = 0$ $-6.C = -36$ $C = \frac{36}{6} = 6$

8. Para identificar qual das funções apresenta o menor valor para a coordenada y do vértice da parábola, vamos calcular as coordenas do vértice de cada uma delas.

Começaremos pela função $y = x^2 + 1$

$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$ $\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 0^2 - 4.1.1$ $\Delta = -4$

$y_v = \frac{-(-4)}{4.1} = 1$

Vamos agora calcular a coordenada y do vértice da parábola da função $y = x^2 - 1$

$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$ $\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 0^2 - 4.1.(-1)$ $\Delta = 4$

$y_v = \frac{-4}{4.1} = -1$

Portanto, a função que apresenta o menor valor para o vértice y da parábola que a descreve graficamente, é a função $y = x^2 - 1$