

Ergänzende Aufgaben zur Planarbeit Multiplikationsmodell bei linearen Verflechtungen

Aufgabe 1:

Zu einem zweistufigen Produktionsprozess gehören die folgenden Stücklisten (siehe oben):

A	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
R_1	2	3	1
R_2	4	1	2

B	Z_{21}	Z_{22}
Z_{11}	2	0,2
Z_{12}	1	2
Z_{13}	0,5	3

C	E_1	E_2
Z_{21}	3	4
Z_{22}	2	1,5

- (a) Aus den Rohstoffen R_1 und R_2 sollen 9 ME des Zwischenproduktes Z_{11} , 7 ME des Zwischenproduktes Z_{12} und 5 ME des Zwischenproduktes Z_{13} erzeugt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 werden hierfür benötigt?
- (b) Aus den Zwischenprodukten erster Stufe Z_{11} , Z_{12} und Z_{13} sollen 11 ME des Zwischenproduktes Z_{21} und 13 ME des Zwischenproduktes Z_{22} erzeugt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte erster Stufe Z_{11} , Z_{12} und Z_{13} werden hierfür benötigt?
- (c) Es sollen 15 ME des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{21} und 23 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{22} hergestellt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 werden hierzu benötigt?

Hinweis: Sie zunächst jeweils ohne und anschließend mit Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 2:

Zu einem zweistufigen Produktionsprozess gehören die folgenden Stücklisten (siehe oben):

A	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
R_1	1	0	0
R_2	2	0	1
R_3	0	3	0
R_4	0	2	2

B	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}
Z_{11}	1	2	0
Z_{12}	1	0	2
Z_{13}	0	2	2

C	E_1	E_2
Z_{21}	5	3
Z_{22}	7	0
Z_{23}	2	4

- (a) Bestimmen Sie aus der nebenstehenden Tabelle den Rohstoffbedarf für den folgenden Vektor

von Zwischenprodukten erster Stufe $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

- (b) Bestimmen Sie den Bedarf an Zwischenprodukten erster Stufe für den folgenden Vektor von

Zwischenprodukten zweiter Stufe $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

- (c) Berechnen den Bedarf an Rohstoffen für den folgenden Vektor von Zwischenprodukten

zweiter Stufe $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Lösungen der ergänzenden Aufgaben**Lösungen Aufgabe 1**

(a) Wir lesen aus der Tabelle A ab!

Ohne Matrizenmultiplikation:

Mengeneinheiten des Rohstoffes

$$R_1: r_1 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 5 = 44;$$

Mengeneinheiten des Rohstoffes

$$R_2: r_2 = 4 \cdot 9 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 53.$$

Mit Matrizenmultiplikation:

Vektor der Zwischenprodukte erster Stufe:

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rohstoffvektor:

$$\vec{r} = \mathbf{A}\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 53 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir lesen aus der Tabelle B ab!

Ohne Matrizenmultiplikation

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{11}: z_{11} = 2 \cdot 11 + 0,2 \cdot 13 = 24,6;$$

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{12}: z_{12} = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 13 = 37;$$

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{13}: z_{13} = 0,5 \cdot 11 + 3 \cdot 13 = 44,5.$$

Mit Matrizenmultiplikation:

Vektor der Zwischenprodukte zweiter Stufe:

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Vektor der Zwischenprodukte erster Stufe:

$$\vec{z}_1 = \mathbf{B}\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,6 \\ 37 \\ 44,5 \end{pmatrix}$$

(c) Wir lesen aus den Tabellen A und B ab!

Benötigte Zwischenprodukte erster Stufe für 15 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{21} und 23 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{22} :

Ohne Matrizenmultiplikation

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{11}: z_{11} = 2 \cdot 15 + 0,2 \cdot 23 = 34,6;$$

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{12}: z_{12} = 1 \cdot 15 + 2 \cdot 23 = 61;$$

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes

$$Z_{13}: z_{13} = 0,5 \cdot 15 + 3 \cdot 23 = 76,5.$$

Benötigte Rohstoffe für 34,6 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes erster Stufe Z_{11} , 61 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes erster Stufe Z_{12} und 76,5 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes erster Stufe Z_{13} :

Mengeneinheiten des Rohstoffes $R_1: r_1 = 2 \cdot 34,6 + 3 \cdot 61 + 1 \cdot 76,5 = 328,7$;

Mengeneinheiten des Rohstoffes $R_2: r_2 = 4 \cdot 34,6 + 1 \cdot 61 + 2 \cdot 76,5 = 352,4$.

Mit Matrizenmultiplikation

Vektor der Zwischenprodukte zweiter Stufe: $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$

$$\text{Rohstoffvektor: } \vec{r} = \mathbf{AB} \cdot \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 & 9,4 \\ 10 & 8,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 328,7 \\ 352,4 \end{pmatrix}$$

Lösungen Aufgabe 2

(a) Der Rohstoffbedarf ergibt sich aus Multiplikation der zu der Stückliste A gehörigen Matrix \mathbf{A} mit dem Vektor von Zwischenprodukten erster Stufe \vec{z}_1

$$\vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 39 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 12 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{11} , 10 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{12} und 15 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{13} werden 12 Einheiten des Rohstoffes R_1 , 39 Einheiten des Rohstoffes R_2 , 30 Einheiten des Rohstoffes R_3 und 50 Einheiten des Rohstoffes R_4 benötigt.

(b) Der Bedarf an Zwischenprodukten erster Stufe ergibt sich aus Multiplikation der zur Stückliste B gehörigen Matrix \mathbf{B} mit dem Vektor von Zwischenprodukten zweiter Stufe \vec{z}_2

$$\vec{z}_1 = \mathbf{B} \cdot \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 34 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 6 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{21} , 8 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{22} und 14 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{23} werden 22 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{11} , 34 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{12} und 44 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{13} benötigt.

(c)

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Der Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten zweiter Stufe und den Rohstoffen ist durch die folgende Tabelle gegeben:

AB	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}
R_1	1	2	0
R_2	2	6	2
R_3	3	0	6
R_4	2	4	8

$$\bar{r} = \mathbf{AB} \cdot \bar{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 102 \\ 156 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 6 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{21} , 8 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{22} und 14 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{23} werden 22 Einheiten des Rohstoffes R_1 , 88 Einheiten des Rohstoffes R_2 , 102 Einheiten des Rohstoffes R_3 und 156 Einheiten des Rohstoffes R_4 benötigt.