1 Lineare Gleichungssysteme

Didaktische Hinweise

Diese Station ist ein Unterrichtsbeispiel zur Einführung von Linearen Gleichungssystemen. Auf vier sehr detaillierten Arbeitsblättern werden die Problemstellung und die Zielsetzung beim Lösen von Linearen Gleichungssystemen dargelegt, Begriffe definiert, und das Gauß-Verfahren entwickelt.

Diese vier Arbeitsblätter können selbstständig von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Sie können ihre Ergebnisse anhand des ausführlichen Lösungsblattes oder mit einem digitalen Mathematikwerkzeug kontrollieren. Ein Pool von weiteren Aufgaben dient der Konsolidierung des Lernergebnisses.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler …

… erarbeiten die grundlegenden Begriffe im Zusammenhang mit Linearen Gleichungssystemen selbständig.

… kennen unterschiedliche Darstellungsformen von LGS und können zwischen diesen wechseln.

… kennen die Äquivalenzumformungen, die zur Lösung von LGS angewendet werden können.

… lösen LGS mit dem Gauss-Verfahren und können die Lösungsschritte erklären.

… wenden das Gauss-Verfahren an, um Funktionsterme von ganzrationalen Funktionen aus gegebenen Punkten des Schaubildes aufzustellen.

…

Übersicht der Materialien

- 4 Schülerarbeitsblätter: Lineare Gleichungssysteme
Das GAUSS-Verfahren I – III
- Lösungsblatt — zum Arbeitsblatt 4
- Aufgabenblatt — LGS in Rätseln
- Aufgabenblatt — Ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften
- Aufgabenblatt — LGS mit gestuften Hilfen

Arbeitsblatt 1

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

<u>Beispiel (Problem)</u>

Wie lautet die Gleichung einer Parabel, die durch die Punkte A(2|0), B(3|0,5) und C(1|−1,5) verläuft?

Setzt man nacheinander die Wertepaare in die Funktionsgleichung
f(x) = a x² + b x + c ein, erhält man:

$$\text{LGS} \qquad \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0{,}5 \\ a + b + c = -1{,}5 \end{cases}$$

Mehrere zusammengehörende lineare Gleichungen nennt man ein **lineares Gleichungssystem (LGS)**. Die Zahlen vor den Variablen (Unbekannten) nennt man **Koeffizienten.**

Im Folgenden soll eine vereinfachende Darstellung von linearen Gleichungssystemen (in Tabellenform, LGS als Matrix) eingeführt und eine übersichtliche, zielführende Methode vorgestellt werden, lineare Gleichungssysteme zu lösen.

$$\boxed{\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 0 \\ 9a + 3b + c &= 0{,}5 \\ a + b + c &= -1{,}5 \end{aligned}}$$

Nur die Koeffizienten und das Ergebnis werden in einer Tabelle angegeben.

LGS in Tabellenform

a	b	c	
4	2	1	0
9	3	1	0,5
1	1	1	-1,5

Koeffizienten

Ergebnisspalte

Die Koeffizienten und das Ergebnis werden geordnet in Zeilen und Spalten geschrieben.

LGS als Matrix (Zahlenschema)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{array}\right)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Beachte: In der Tabellen- und Matrixform müssen die **Vorzeichen der Koeffizienten** beachtet werden!

Beispiel:

$$\begin{aligned} -a + 3b - 2c &= 0 \\ a - 2b + c &= -2 \\ -3a + b - c &= 7 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 2

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme: Das GAUSS-Verfahren

<u>Problem</u>

Wie löst man ein Lineares Gleichungssystem mit drei oder mehr Unbekannten übersichtlich und zielgerichtet?

Die **Lösung eines LGS** mit **n Unbekannten** (meist mit x_1, x_2, x_3, …bezeichnet) besteht aus der Angabe der Zahlenwerte dieser n Unbekannten, sodass alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden. Die Lösung gibt man als geordnetes Zahlenpaar, bzw. Zahlentripel, bzw. Zahlenquadrupel ... (allgemein **n-Tupel**) an.

<u>Beispiel</u> $a = -\frac{1}{2} \wedge b = 3 \wedge c = -4$ bzw. $(-\frac{1}{2}; 3; -4)$

Durch **Äquivalenzumformungen** einzelner Gleichungen (Zeilen der Matrix) ändert sich die Lösung(smenge) nicht. Durch geschickte Umformungen kann man das LGS in **Stufenform oder reduzierte Stufenform** bringen und die Lösung durch „Rückwärtseinsetzen“ bestimmen oder unmittelbar angeben.

<u>Beispiel</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{in Stufenform} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+3-4=-1{,}5 \\ 2b-12=-6 \\ c=-4 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -0{,}5 \wedge b = 3 \wedge c = -4$

$$\text{reduzierte Stufenform} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Mögliche **Äquivalenzumformungen** sind

- Zwei Zeilen vertauschen: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Eine Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$ multiplizieren:
  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -6 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Zwei Zeilen addieren und Ergebnis anstelle einer dieser Zeilen setzen
  $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -6 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -6 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

Multiplikation und Addition können „geschickt“ kombiniert werden, um das Ziel Stufenform der Matrix zu erreichen.

Arbeitsblatt 3

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme: Das GAUSS-Verfahren II

<u>Start</u> Gesucht sind alle Werte für x_1, x_2, x_3, x_4, die alle Gleichungen des LGS erfüllen.	Beispiel mit vier Unbekannten LGS: $\left\{\begin{array}{r} \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \end{array}\right.$
<u>Ziel</u> Das LGS soll in die Stufenform gebracht werden. Dann ergibt sich Die Lösung für x_1, x_2, x_3, x_4 aus der Stufenform durch „Rückwärtseinsetzen“.	Stufenform LGS: $\left\{\begin{array}{r} \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_4=\ldots \end{array}\right.$
<u>Erster Schritt</u> Eliminiere x_1 durch Äquivalenzumformungen aus der zweiten, dritten und vierten Gleichung.	LGS: $\left\{\begin{array}{r} \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \end{array}\right.$
<u>Zweiter Schritt</u> Eliminiere x_2 durch Äquivalenzumformungen aus der dritten und vierten Gleichung.	LGS: $\left\{\begin{array}{r} \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \end{array}\right.$
<u>Dritter Schritt</u> Eliminiere x_3 durch Äquivalenzumformungen aus der vierten Gleichung.	LGS: $\left\{\begin{array}{r} \ldots x_1+\ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_2+\ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_3+\ldots x_4=\ldots \\ \ldots x_4=\ldots \end{array}\right.$
<u>Rückwärtseinsetzen</u> Bestimme x_4, danach nacheinander x_3, x_2 und x_1.	$x_1 = \ldots \;\wedge\; x_2 = \ldots \;\wedge\; x_3 = \ldots \;\wedge\; x_4 = \ldots$

Arbeitsblatt 4

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme: Das GAUSS-Verfahren III

<u>Beispiel</u>

LGS in Matrixform	Umformungen	Bemerkungen
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$		

Lösung zum Arbeitsblatt 4

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme: Das GAUSS-Verfahren III

<u>Beispiel</u>

LGS in Matrixform	Umformungen	Bemerkungen
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$	Erste und dritte Zeile tauschen	Optionaler Schritt, eventuelle Vereinfachung der Rechnung
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} \cdot(-9) \\ + \\ \end{array} \right.$	Erste Zeile mit -9 multiplizieren und zur zweiten Zeile addieren, zweite Zeile ersetzen.	Zwischenschritt: $\begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 & 13{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & -6 & -8 & 14 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ \\ + \end{array} \right.$	Erste Zeile mit -4 multiplizieren und zur dritten Zeile addieren, dritte Zeile ersetzen.	Zwischenschritt: $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & -8 & 14 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & -6 & -8 & 14 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-3) \end{array} \right.$	Dritte Zeile mit -3 multiplizieren, zweite Zeile zur dritten addieren, dritte Zeile ersetzen.	Zwischenschritt: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & -6 & -8 & 14 \\ 0 & 6 & 9 & -18 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & -6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot 8 \end{array} \right\| \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$	Rückwärtseinsetzen oder weiter reduzieren	Lösung für x_3 ergibt sich aus der dritten Zeile: $x_3 = -4$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} + \\ :6 \\ \end{array} \right.$		Lösung für x_2 ergibt sich aus der zweiten Zeile: $x_2 = 3$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \left\| \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \right.$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$		Die Lösung des LGS steht in der rechten Spalte: $x_1 = -0{,}5 \wedge x_2 = 3 \wedge x_3 = -4$

Die Umformungen des LGS sind nicht eindeutig, andere Wege sind möglich.
Die Lösung muss stets die gleiche sein.

Aufgabenblatt 1

Lineare Gleichungssysteme in Rätseln

1. In einem Stall sind Kaninchen und Fasanen; sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wie viel Tiere jeder Art sind es?
   (Aus einem alten chinesischen Rechenbuch).

2. In einer Familie hat jeder Sohn ebenso viele Brüder wie Schwestern und jede Tochter halb so viele Schwestern wie Brüder.
   Wie viele Söhne und Töchter sind es?

3. Auf einer kreisförmigen Rennbahn von 480m Länge trainieren zwei Radfahrer. Fahren sie in gleicher Richtung, so überholt der schnellere den anderen alle 240 Sekunden; fahren sie einander entgegen, so treffen sie sich alle 20 Sekunden. Welche Geschwindigkeit haben die Radfahrer?

4. Robert ist 28 Jahre alt und damit doppelt so alt, wie Walter war, als Robert so alt war, wie Walter heute ist. Wie alt ist Walter?

5. Man stelle sich vor, dass um den Erdäquator ein Seil straff gespannt ist. Es hat dann eine Länge von - sagen wir genau – 40000 km. Wenn man nun dieses Seil um ein Meter verlängert, so liegt es natürlich nicht mehr eng an der Erde an.

   Wenn das Seil gleichmäßig von der Erde abstehen würde, könnte dann eine Stubenfliege darunter durchkrabbeln? (Begründung!)

6. An einer Kreuzung hält ein Autofahrer an, um sich bei einem Passanten zu erkundigen, wie weit es von hier bis Höpsenweiler sei. Der Gefragte scheint aber ein wenig umständlich zu sein, denn er antwortet: „Wenn Sie über Murkenbüttel fahren, ist es 17 Kilometer weiter, als wenn Sie den direkten Weg nehmen. Wollten Sie jedoch von hier über Höpsenweiler nach Murkenbüttel fahren, dann müssten Sie 19 Kilometer mehr zurücklegen als auf dem direkten Weg dorthin. Von Höpsenweiler nach Murkenbüttel würde übrigens der Umweg über diese Kreuzung fünf Kilometer kürzer als das Doppelte des direkten Weges sein.“

   Wie weit ist es von der Kreuzung bis Höpsenweiler auf dem direkten Weg?

Aufgabenblatt 2

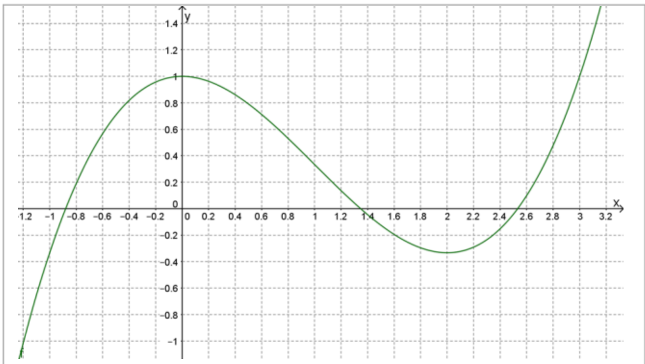
Ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften

Unter sehen Sie Schaubilder ganzrationaler Funktionen vom Grad n.

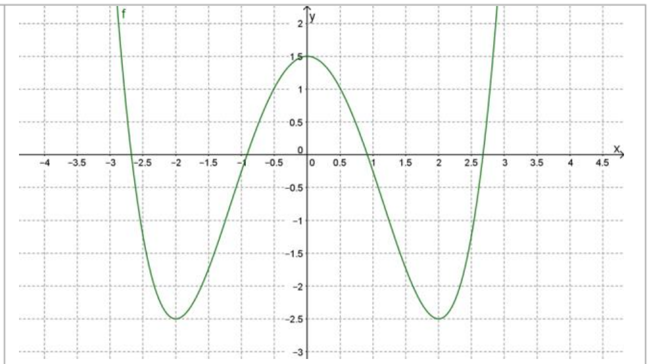
Bestimmen Sie die zugehörigen Funktionsterme, indem Sie Informationen aus den Schaubildern ablesen und einen möglichst kleinen Grad der Funktion annehmen.

Kontrollieren Sie Ihre Lösung, indem Sie das jeweilige Schaubild mit Geogebra zeichnen und mit der Abbildung vergleichen.

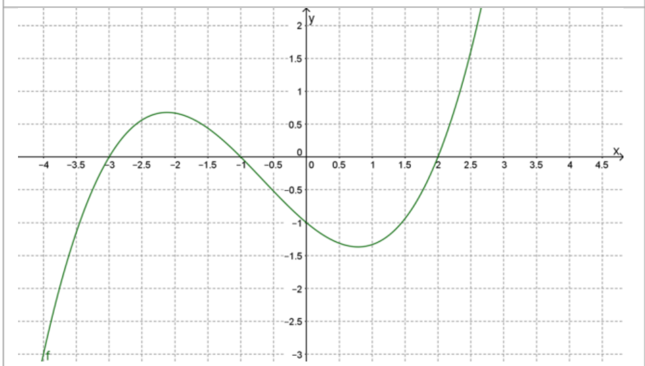
Tipp: *Einige Beispiele kann man auch ganz einfach „von Hand" lösen…*
Hinweis: *Je nach Wahl der Ablesepunkte und Genauigkeit kann Ihre Lösung von der Musterlösung abweichen.*



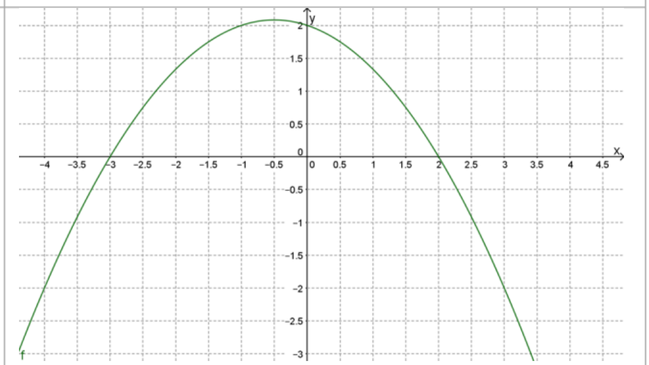
Lösung: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$



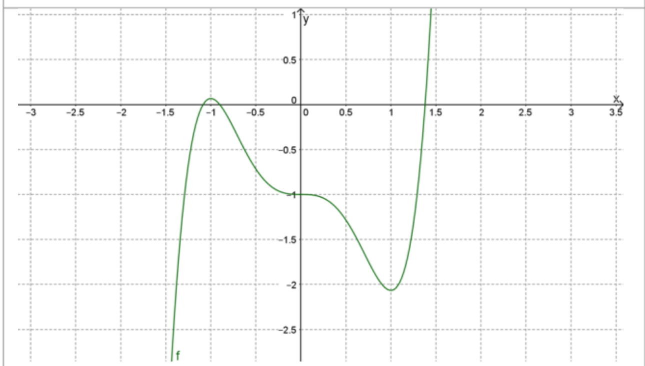
Lösung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}$



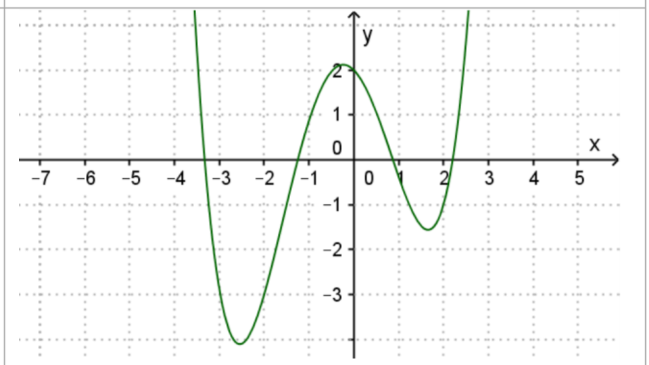
Lösung: $f(x) = \frac{1}{6}(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+1)$



Lösung: $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)\cdot(x+3)$



Lösung: $f(x) = \frac{8}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 - 1$



Lösung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}x^3 - 2x^2 - x + 2$