Rechnerische Bestimmung einer Ableitungsfunktion

Dieses Arbeitsblatt gehört zum GeoGebraBook *Einführung Differenzialrechnung Kompakt*. Ziel ist, dass du Ableitungsfunktionen mit Hilfe des Differenzenquotienten bestimmen kannst. In der Einführung machen wir das mit derselben Funktion wie im Kapitel *Ableitungsfunktion grafisch*:

$$f(x) = x^2.$$

Erforderliches Vorwissen

Du kannst bereits die Ableitung einer Funktion an einer konkreten Stelle x_0 mit dem Differenzenquotienten ausrechnen.

Idee

Bisher haben wir immer eine bestimmte Stelle, z.B. $x_0 = 3$, genommen und die Ableitung an dieser Stelle sah dann so aus:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}.$$

Das wurde noch mit der binomischen Formel vereinfacht und dann haben wir h gengen Null gehen lassen. So bekamen wir eine Zahl für die Steigung an dieser Stelle raus.

Genau so machen wir es jetzt auch, nur dass wir keine konkrete Stelle x_0 benutzen, sondern stattdessen einfach x schreiben. Dann wird am Ende auch keine konkrete Zahl als Steigung rauskommen sondern ein Term mit x drin. Und das ist doch genau das, was wir wollen: Ein Funktionsterm, der uns für einen eingesetzten x-Wert den Wert der Ableitung an dieser Stelle liefert.

Rechnung

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \mid \text{Funktion einsetzen}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} && \mid \text{Binomische Formel anwenden}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 \cancel{- x^2}}{h} && \mid \text{Termvereinfachung, ausklammern}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} && \mid \text{kürzen}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) && \mid \text{h gegen Null gehen lassen}\\
&= 2x
\end{aligned}$$

Tipp: Ziel ist es bei diesen Rechnungen immer, im Nenner das h wegzukürzen. Das geht, indem man im Zähler ein h ausklammert.

Ergebnis

Zur Funktion $f(x) = x^2$ gehört also die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x$. Mit ihrer Hilfe kann nun an beliebigen Stellen sofort die Steigung des Graphen von f bestimmt werden. Z. B.:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$
$$f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$$
$$f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

Aufgabe

Berechne auf diese Art zu den folgenden Funktionen jeweils die Ableitungsfunktion:

1. $f(x) = 0,5x^2$
2. $f(x) = 2x^2 + 5$
3. $f(x) = -x^2 + x$

Lösungen: $f'(x) = x$; $f'(x) = 4x$; $f'(x) = -2x + 1$

Rechnung zu 3:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 + (x+h) - (-x^2 + x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{-x^2} - 2hx - h^2 \cancel{+x} + h \cancel{+x^2} \cancel{-x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2 + h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (-2x - h + 1)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} (-2x + 1 - h) \\
&= -2x + 1
\end{aligned}$$